

**EIGENSCHAFTEN DER BAHNEN
DES EINGESCHRÄNKTEN DREIKÖRPERPROBLEMS
IN DER NÄHE DER IHNEN ZUGEHÖRIGEN HILLSCHEN GRENZKURVEN**

INAUGURAL - DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jörg Schmid

aus Dietersweiler

Berlin 1976

**EIGENSCHAFTEN DER BAHNEN
DES EINGESCHRÄNKTEN DREIKÖRPERPROBLEMS
IN DER NÄHE DER IHNEN ZUGEHÖRIGEN HILLSCHEN GRENZKURVEN**

INAUGURAL - DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde

des

Fachbereichs Mathematik
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Jörg Schmid

aus Dietersweiler

Berlin 1976

1. Referent: Professor Dr. E. Mohr

2. Referent: Professor Dr. F. Hinderer



Tag der mündlichen Prüfung: 11. März 1976

Tag der Promotion: 28. April 1976

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einführung in das Gegenstandsfeld	
1.1 Die Aufgaben des Gegenstandsfeldes	1
1.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	2
1.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	3
II. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
2.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	4
2.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	5
2.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	6
2.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	7
III. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
3.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	8
3.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	9
3.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	10
3.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	11
IV. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
4.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	12
4.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	13
4.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	14
4.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	15
V. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
5.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	16
5.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	17
5.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	18
5.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	19
VI. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
6.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	20
6.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	21
6.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	22
6.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	23
VII. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
7.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	24
7.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	25
7.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	26
7.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	27
VIII. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
8.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	28
8.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	29
8.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	30
8.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	31
IX. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
9.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	32
9.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	33
9.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	34
9.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	35
X. Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	
10.1 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	36
10.2 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	37
10.3 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	38
10.4 Die Bedeutung der Gegenstandsfelder	39

Meinen Lehrern

- Prof. Dr. A. Dinghas
- Prof. Dr. F. Hinderer
- Prof. Dr. E. Mohr



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
I. Einführung in das Eingeschränkte Dreikörperproblem.	1
§ 1 Die Definition des Eingeschränkten Dreikörperproblems und deren Motivierung.	1
§ 2 Herleitung der Differentialgleichungen des Probekörpers im rotierenden Koordinatensystem.	4
§ 3 Das JACOBI'sche Integral und Folgerungen.	8
II. Die Potentialfunktion und die HILL'schen Grenzkurven.	10
§ 4 Extrema der Potentialfunktion.	10
§ 5 Numerische Werte der Potentialfunktion in den Librationszentren.	16
§ 6 Die HILL'schen Grenzkurven.	22
§ 7 Der Spiegelungssatz und Folgerungen.	28
III. Die CHARLIER'sche Theorie.	38
§ 8 Die einfachsten periodischen Näherungslösungen.	38
§ 9 Enge Bahnen um die LAGRANGE'schen Dreieckspunkte.	41
§ 10 Enge Bahnen um die kollinearen Librationszentren.	56
§ 11 Beziehungen zwischen den CHARLIER'schen Bahnen, ihren JACOBI'schen Konstanten und HILL'schen Grenzkurven.	67
§ 12 Erweiterungen der CHARLIER'schen Theorie.	74
§ 13 Eine Formel für die Bahnkrümmung.	77

	Seite
IV. Lösungen der verstümmelten Differentialgleichungen.	84
§ 14 Herleitung der verstümmelten Differentialgleichungen.	84
§ 15 Einmalige Integration der verstümmelten Differentialgleichungen und die Krümmungs- formel.	88
§ 16 Die Schar der Nullkrümmungskurven.	92
§ 17 Die Lösung des verstümmelten Differentialgleichungssystems.	96
V. Das nicht verstümmelte Differential- gleichungssystem.	101
§ 18 Das Lösungsverhalten der Bahnen, deren HILLsche Grenzkurve in unmittelbarer Nähe eines der LAGRANGESchen Libra- tionszentren liegt.	101
§ 19 Die beiden Scharen der Nullkrümmungs- kurven des vollständigen Differential- gleichungssystems.	107
§ 20 Qualitative Untersuchungen der Lösungsbahnen im HILLSchen Streifen $\hat{\mathcal{D}}_0$	113
Literaturverzeichnis	124

I. Einführung in das Eingeschränkte Dreikörperproblem.

§ 1. Die Definition des Eingeschränkten Dreikörperproblems und deren Motivierung.

Die vom theoretischen Standpunkt aus unüberwindbaren Schwierigkeiten, die sich der Lösung des Dreikörperproblems in seiner allgemeinen Form entgegenstellen, ließen es bedeutenden Mathematikern ratsam erscheinen, die Problemstellung durch einschränkende Voraussetzungen so weit wie möglich zu vereinfachen. Hierbei ließen sie sich vorwiegend von dem Gedanken leiten, wenigstens in einem Spezialfall des allgemeinen Dreikörperproblems mit der zu Gebote stehenden mathematischen Strenge so tief einzudringen, wie dies der augenblickliche Stand der Analytischen Mechanik überhaupt zuließ. Dieser mathematisch reizvolle Sonderfall wird von H. POINCARÉ als das "problème restreint", als "Restringiertes Dreikörperproblem" oder auch als "Eingeschränktes Dreikörperproblem" bezeichnet. Das Problem ist hierbei bereits soweit spezialisiert, daß es bei jeder zusätzlichen Einschränkung die charakteristische Eigenschaft - noch ein Dreikörperproblem zu sein - verliert, eine kleine Verallgemeinerung dagegen den Ausbau der Theorie aus später ersichtlichen Gründen zu bald schon zum Erliegen bringt. Natürlich wird auch hierbei reine Punktmechanik betrieben. In dieser Hinsicht lautet die

Definition des Eingeschränkten Dreikörperproblems:

1. Die Masse eines der drei Körper - Probekörper - ist so klein, daß seine Anziehung auf die beiden anderen Körper - Hauptkörper - vernachlässigt werden kann.
2. Die beiden Hauptkörper führen Kreisbewegungen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt aus.
3. Der Probekörper - mit "unendlich kleiner" Masse - bewegt sich in derselben Ebene wie die Hauptkörper.

Da diese Definition die Grundlage unserer Arbeit darstellt, sollen ihre drei Forderungen zunächst näher erläutert und behandelt werden.

Wenden wir unsere Aufmerksamkeit der ersten Forderung zu. Hiernach soll die Masse des Probekörpers so klein sein, daß sie vernachlässigt werden kann gegen jede der Massen der beiden Hauptkörper. Dadurch fällt der Schwerpunkt S unseres Systems, der ja beim n-Körperproblem nach dem Schwerpunktsatz einer geradlinigen gleichförmigen Bewegung unterworfen ist, mit dem Schwerpunkt des Systems unserer Hauptkörper zusammen, und es handelt sich bei den beiden Hauptkörpern um ein ungestörtes Zweikörperproblem.

Durch die Einführung von Relativkoordinaten wird das Zweikörperproblem auf ein Einkörperproblem zurückgeführt. Der Unterschied zum gewöhnlichen Einkörperproblem besteht allerdings darin, daß an die Stelle der Zentralmasse M nun die fiktive Masse $M = m_1 + m_2$ tritt.

Liegen als KEPLER-Bahnen Ellipsen vor, so sind nach den ersten beiden KEPLERschen Gesetzen die Bewegungen periodisch. Das dritte KEPLERsche Gesetz liefert uns die Umlaufzeit T , mit der sich m_2 um m_1 bewegt, zu

$$(I. 1) \quad T = \frac{2 \pi a^{3/2}}{\sqrt{\chi^2 M}}$$

beziehungsweise die in der Astronomie vielfach verwendete "mittlere Bewegung n " zu

$$(I. 2) \quad n = \frac{\sqrt{\chi^2 M}}{a^{3/2}}$$

Hierbei bedeuten

(I. 3) a die große Halbachse der Ellipse, auf der sich nach dem ersten KEPLERschen Gesetz m_2 in Relativkoordinaten um m_1 bewegt;

$M = m_1 + m_2$ die Summe der Massen der beiden Hauptkörper, welche wir eben mit "fiktiver Masse" bezeichnet haben,

χ^2 die NEWTONsche Gravitationskonstante.

Wir wollen gleich hier die Zeit so normieren, daß

$$(I, 4) \quad \mathcal{X}^2 = 1 .$$

Im Schwerpunktsystem sind die Bahnen der beiden Hauptkörper bekanntlich Ellipsen, die der KEPLER-Ellipse im Relativkoordinatensystem ähnlich sind.

Durch die zweite Forderung in der Definition des Eingeschränkten Dreikörperproblems wird nun unter der Schar aller für unsere beiden Hauptkörper möglichen KEPLER-Ellipsen noch folgende Auswahl getroffen:

Eine letzte Einschränkung der Anfangswerte soll uns garantieren, daß als Bewegungsbahnen dieses Zweikörperproblems nur noch Kreislösungen in Frage kommen. Die Distanz der beiden Hauptkörper ist also damit für alle Zeiten konstant, etwa gleich a , womit wir mit Hilfe des Flächensatzes dann sofort die Konstanz der Winkelgeschwindigkeit ω , mit der sich nun in Relativkoordinaten m_2 um m_1 bewegt, erhalten. Es fällt also die Winkelgeschwindigkeit ω mit der mittleren Bewegung n zusammen. Somit ist nach (I, 1) und (I, 4)

$$(I, 5) \quad \omega = \frac{\sqrt{M}}{a^{3/2}} , \quad M = m_1 + m_2$$

Wie man leicht sieht, gilt (I, 5) auch für die Kreisbewegungen von m_1 und m_2 in absoluten Koordinaten. O. B. d. A. sei unsere Bewegungsebene bereits so orientiert, daß ω positiv, unsere beiden Hauptkörper sich also im mathematisch positivem Sinn um ihren Schwerpunkt bewegen.

In dieser Ebene soll nach der dritten Forderung nun die Bewegung unseres Probekörpers verlaufen. Dies ist genau dann der Fall, wenn zu einem beliebigen Zeitpunkt sich der Probekörper in einem Punkt der Ebene befindet und sein Geschwindigkeitsvektor parallel zur Ebene ist.

Da unter Vernachlässigung der Anziehung der übrigen Planeten die ersten beiden Forderungen unserer Definition bei dem System Sonne - Jupiter "weitgehend" erfüllt sind, wollen wir fortan den Hauptkörper größerer Masse - m_1 - mit "Sonne", den kleineren Masse - m_2 - dagegen mit "Jupiter" bezeichnen.

§ 2. Herleitung der Differentialgleichungen des Probekörpers im rotierenden Koordinatensystem.

Da die Bahnen der beiden Hauptkörper nach dem vorigen Paragraphen festgelegt sind, reduziert sich das Eingeschränkte Dreikörperproblem auf die Bestimmung der möglichen Bahnkurven des Probekörpers.

Wählen wir den Ursprung der Zeit t so, daß sich für $t = 0$ die "Sonne" mit der Masse m_1 auf dem negativen Teil, "Jupiter" mit der Masse m_2 auf dem positiven Teil der Abszisse des absoluten Koordinatensystems befindet. Damit lauten nach dem Schwerpunktsatz die Bewegungsgleichungen für die "Sonne"

$$(I. 6) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= - \frac{a m_2}{M} \cos \omega t, & \eta_1 &= - \frac{a m_2}{M} \sin \omega t, & \text{und} \\ \xi_2 &= \frac{a m_1}{M} \cos \omega t, & \eta_2 &= \frac{a m_1}{M} \sin \omega t \end{aligned}$$

für den "Jupiter", wobei die konstanten Zahlen ω und M in (I. 5) erklärt sind und a die konstante Distanz der beiden Hauptkörper bedeutet. Der Probekörper mit der Masse m^* bewegt sich in dem Potentialfeld, das von dem NEWTONschen Potential der beiden Hauptkörper herrührt. Dieses NEWTONsche Potential lautet

$$(I. 7) \quad - E_{\text{pot}} = U(\xi, \eta) = \frac{m_1 m^*}{r} + \frac{m_2 m^*}{\varrho}$$

Dabei ist

$$(I. 8) \quad r = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}, \quad \varrho = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2}$$

wobei ξ_1, η_1 die Koordinaten von m_1 und ξ_2, η_2 die Koor-

dinaten von m_2 sind, die durch (I.6) gegeben sind. Die auf m^* wirkende Kraft an einer Stelle (ξ, η) ergibt sich bekanntlich aus (I.7) durch partielle Differentiation nach ξ und η . Die kinetische Energie E_{kin} des Probekörpers in den absoluten (ξ, η) -Koordinaten lautet

$$(I.9) \quad E_{\text{kin}} = \frac{m^*}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2),$$

wobei der Punkt die Ableitung nach t bedeutet.

Die Bewegungsgleichungen des Probekörpers sind die Extremalen des Integrals

$$(I.10) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) dt,$$

wobei L die LAGRANGESche Funktion ist, für die mit (I.7) und (I.9) gilt

$$(I.11) \quad L(t, \xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}) = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = \frac{m^*}{2} (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{m_1 m^*}{r} + \frac{m_2 m^*}{\varrho}.$$

Da hierin r und ϱ eingehen, was auf Grund von (I.8) und (I.6) zu EULER-LAGRANGESchen Differentialgleichungen von einer für unsere weiteren Betrachtungen recht unbequemen Gestalt führt, wollen wir eine geeignete Koordinatentransformation vornehmen und uns auf die bekannte Tatsache stützen, daß die EULER-LAGRANGESchen Differentialgleichungen gegenüber Punkttransformationen invariant sind. Es handelt sich hierbei um die Transformation auf ein rotierendes (x, y) -Koordinatensystem, welches durch folgende Gleichungen gegeben wird:

$$(I.12) \quad \begin{aligned} \xi &= x \cos \omega t - y \sin \omega t \\ \eta &= x \sin \omega t + y \cos \omega t \end{aligned}$$

Bei diesem (x, y) -System handelt es sich wiederum um ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Ursprung mit S , also dem Ursprung des (ξ, η) -Systems zusammenfällt, aber um diesen mit der nach (I.5) konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Die beiden Haupt-

körper nehmen dabei feste Plätze ein und ihre Koordinaten lauten

$$(I.13) \quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{m_2 a}{M}, & y_1 &= 0 & \text{für die "Sonne"} \\ x_2 &= \frac{m_1 a}{M}, & y_2 &= 0 & \text{für den "Jupiter"}. \end{aligned}$$

Aus (I.11) und (I.12) erhalten wir nach kurzer Rechnung die neue LAGRANGESche Funktion $\hat{L}$ zu

$$(I.14) \quad \hat{L}(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = m^* \left\{ \frac{1}{2} [(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2] + U(x, y) \right\}$$

$$U(x, y) = \frac{m_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}}$$

wobei x_1 und x_2 durch (I.12) gegeben und x, y und $\dot{x}, \dot{y}$ die Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Probekörpers im rotierenden (x, y) -Koordinatensystem sind. Da es bekanntlich bei der Herleitung von Extremalen eines Integrals (I.10) nicht auf einen konstanten, von Null verschiedenen, Faktor des Integranden ankommt, können wir statt (I.14) unserem Problem die LAGRANGESche Funktion

$$(I.15) \quad L(t, x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} [(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2] + U(x, y)$$

$$U(x, y) = \frac{m_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}}$$

zu Grunde legen. Wir erhalten daraus sofort

$$(I.16) \quad \begin{aligned} L_x &= \omega(\dot{y} + \omega x) + U_x(x, y) & L_{\dot{x}} &= (\dot{x} - \omega y) \\ L_y &= -\omega(\dot{x} - \omega y) + U_y(x, y) & L_{\dot{y}} &= (\dot{y} + \omega x) \end{aligned}$$

und erhalten die EULER-LAGRANGESchen Differentialgleichungen zu

$$(I.17) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - \omega \dot{y} &= -\omega \dot{y} + \omega^2 x + U_x(x, y) \\ \ddot{y} + \omega \dot{x} &= -\omega \dot{x} + \omega^2 y + U_y(x, y). \end{aligned}$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen des Probekörpers

$$(I. 18) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2 \omega \dot{y} &= \omega^2 x + U_x(x, y) \\ \ddot{y} + 2 \omega \dot{x} &= \omega^2 y + U_y(x, y) \end{aligned}$$

wobei $U(x, y)$ in (I. 15) gegeben ist. Im Hinblick auf die rechten Seiten dieses Differentialgleichungssystems ist es aber naheliegend, ein neues Potential Ω durch

$$(I. 19) \quad \begin{aligned} \Omega(x, y) &= \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) + U(x, y), \\ U(x, y) &= \frac{m_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + y^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{(x-x_2)^2 + y^2}} \end{aligned}$$

zu definieren. Ω läßt sich hierbei deuten als Summe des NEWTON'schen Gravitationspotentials, mit dem die Hauptkörper auf den Probekörper einwirken, und des Rotationspotentials, das durch die Drehung des (x, y) -Koordinatensystems erzeugt wird, wenn wir von der Masse m^* einmal absehen wollen.

Mit (I. 18) und (I. 19) lauten die für unseren Probekörper gesuchten Bewegungsgleichungen im rotierenden (x, y) -Koordinatensystem also

$$(I. 20) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2 \omega \dot{y} &= \Omega_x(x, y) \\ \ddot{y} + 2 \omega \dot{x} &= \Omega_y(x, y) . \end{aligned}$$

Die Ableitung dieser Differentialgleichungen geschah mit Absicht so ausführlich, da die notierten Formeln im späteren Verlauf noch benötigt werden.

Um die weitere Rechnung noch etwas zu vereinfachen, normieren wir die Längeneinheit so, daß die konstante Distanz der beiden Hauptkörper $a = 1$, die Masseneinheit so, daß $M = m_1 + m_2 = 1$ ist, es ergibt sich damit aus (I. 5) sofort $\omega = 1$. Definieren wir noch $m_2 = \mu$, ($0 < \mu < \frac{1}{2}$) und $m_1 = m$, so erhalten wir für spätere Betrachtungen folgende Zusammenfassung:

$$(I. 21) \quad a = \omega = 1; \quad m_2 = \mu, \quad (0 < \mu < \frac{1}{2}); \quad m_1 = m = 1 - \mu .$$

§ 3. Das JACOBIsche Integral und Folgerungen.

Die Bewegungsgleichungen (I.20) des Probekörpers lassen sich sofort einmal integrieren. Denn multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$ und addieren beide Gleichungen, so erhalten wir

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = \Omega_x(x, y)\dot{x} + \Omega_y(x, y)\dot{y}$$

und es stehen sowohl rechts als auch links totale Ableitungen nach der Zeit t . Die Integration nach t liefert das sogenannte JACOBIsche Integral

$$(I.22) \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 \Omega(x, y) - c,$$

wobei c eine beliebige reelle Konstante und v der Betrag der Geschwindigkeit des Probekörpers ist. Auf Grund der in (I.21) vorgenommenen Normierungen gilt für die Potentialfunktion Ω

$$(I.23) \quad \Omega(x, y) = \frac{R^2}{2} + \frac{m}{r} + \frac{\mu}{\varrho}, \quad m + \mu = 1$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \quad \varrho = \sqrt{(x - m)^2 + y^2}.$$

Nach JACOBI bleibt also der Ausdruck $v^2 - 2\Omega$ längs einer Lösung konstant. Dabei hänge c natürlich von der individuellen Wahl der Lösung ab. Zu jedem festen c existieren dagegen ganze Scharen von Lösungen der Differentialgleichungen (I.20). Nun gilt folgender bemerkenswerter

Satz von JACOBI: Wäre außer dem JACOBIschen Integral (I.22) noch ein weiteres Integral von (I.20) bekannt, so wäre das Eingeschränkte Dreikörperproblem im Prinzip gelöst und ließe sich auf Quadraturen zurückführen.

Zum Beweis sei außer (I.22):

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}; c_1) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2 \Omega(x, y) + c_1 = 0$$

noch ein weiteres Integral G von (I.20) gegeben (das, weil (I.20) skleronom-holonom ist, t ebenfalls nicht explizit enthalten kann), d. h. es gelte also

$$(1.24) \quad \begin{aligned} F(x, y, \dot{x}, \dot{y}; c_1) &= 0 \\ G(x, y, \dot{x}, \dot{y}; c_2) &= 0 \end{aligned}$$

Damit existieren für den Fall des Nichtverschwindens der Funktional-determinante $\left| \frac{\partial(F, G)}{\partial(\dot{x}, \dot{y})} \right|$ nach dem Hauptsatz über die Auflösbarkeit impliziter Funktionen zwei (zumindest lokal umkehrbar eindeutige) Funktionen $h(x, y)$, $g(x, y)$ derart, daß

$$(1.25) \quad \dot{x} = h(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

die beiden Gleichungen (1.24) erfüllen.

O.B.d.A. sei h in dem von uns betrachteten Gebiet $\mathcal{G}$ (von dem wir annehmen wollen, daß es einfach zusammenhängend ist) von Null verschieden. Durch Division folgt aus (1.25) sofort

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = - \frac{g(x, y)}{h(x, y)}$$

$$\text{also} \quad g(x, y) dx + h(x, y) dy = 0.$$

Nach der Theorie der partiellen Differentialgleichungen existiert hierfür aber ein in $\mathcal{G}$ nicht verschwindender EULERScher Multiplikator $M(x, y)$, so daß

$$M(x, y) g(x, y) dx + M(x, y) h(x, y) dy = 0$$

$$M(x, y) g(x, y) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}, \quad M(x, y) h(x, y) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial y},$$

womit die erste dieser Gleichungen ein totales Differential und $= dN(x, y)$ ist. Die in $\mathcal{G}$ verbleibenden Bahnkurven werden deshalb durch $N(x, y) = \text{const}$ gegeben. Damit ergibt sich dann unter Anwendung des Hauptsatzes über die Auflösbarkeit impliziter Funktionen vermittle (1.25) (wobei wir $\mathcal{G}$ unter Umständen noch etwas verkleinern müssen)

$$\dot{x} = \varphi(x), \quad \dot{y} = \psi(y)$$

und daraus nach einfachen Quadraturen

$$x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \beta)$$

als allgemeine Lösung von (1.20) mit den beiden Integrationskonstanten α und β .

II. Die Potentialfunktion und die HILLschen Grenzkurven.

§ 4. Extrema der Potentialfunktion.

Die Gestalt unserer Potentialfunktion $\Omega(x, y)$ in (I.23), die wir als Fläche im dreidimensionalen Raum deuten können, läßt nun sofort einige naheliegende Schlüsse zu: offenbar gilt für alle Punkte der (x, y) -Ebene

$$(II.1) \quad \Omega(x, y) = \Omega(x, -y).$$

Außerdem stellt $\Omega(x, y)$ eine bis auf die Punkte $(-\mu, 0)$, $(m, 0)$ - also die Koordinaten der beiden Hauptkörper - und den unendlich fernen Punkt, wo sie in allen drei Fällen $+\infty$ wird, eine reellanalytische Funktion der beiden Variablen x und y dar. Deshalb gilt für sie in ihrem Regularitätsbereich mit Rücksicht auf (II.1)

$$(II.2) \quad \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega(x, y) = (-1)^q \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega[x, -y]; \quad p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

wobei mit

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega[X, Y] = : \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega(x, y) \quad \left| \begin{array}{l} x = X \\ y = Y \end{array} \right.$$

eine für später vorteilhafte Vereinbarung getroffen werden soll.

Für das sogenannte Kopenhagenproblem, benannt nach der Kopenhagener Schule um STRÖMGREN, die im ersten Viertel dieses Jahrhunderts systematisch durch mühsame und mannigfaltige numerische Rechnungen der Erforschung periodischer Lösungen im Großen für den Spezialfall $\mu = m = \frac{1}{2}$ nachgingen, gilt wegen (I.23) neben (II.1) offenbar noch

$$(II.1') \quad \Omega(x, y) = \Omega(-x, y), \quad (m = \mu = \frac{1}{2})$$

und somit

$$(II.2') \quad \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega(x, y) = (-1)^p \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} \Omega[-x, +y],$$

$$p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Wir wollen bereits an dieser Stelle die Potentialfunktion (I.23) noch etwas umformen. Aus

$$r = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \quad \varrho = \sqrt{(x-m)^2 + y^2},$$

erhalten wir sofort mit $m + \mu = 1$

$$m r^2 + \mu \varrho^2 = x^2 + y^2 + \mu m$$

und damit für unsere Potentialfunktion

$$(II.3) \quad 2 \Omega(x, y) = m \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \mu \left(\varrho^2 + \frac{2}{\varrho} \right)$$

$$r = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}, \quad \varrho = \sqrt{(x-m)^2 + y^2}, \quad m + \mu = 1$$

wenn wir von dem konstanten Term μm absehen, was wir uns aber erlauben können, da in dem Differentialgleichungssystem unseres Probekörpers (I.20) ja nicht die Potentialfunktion selbst, sondern nur deren partielle Ableitungen erster Ordnung nach x und y vorkommen. Diese lauten im Regularitätsbereich der Potentialfunktion nach

(II.3)

$$\Omega_x = \Omega_{r x} + \Omega_{\varrho} \varrho_x$$

(II.4)

$$\Omega_y = \Omega_{r y} + \Omega_{\varrho} \varrho_y$$

mit

$$\Omega_r = m \left(r - \frac{1}{2r} \right); \quad r_x = \frac{x+\mu}{r}, \quad r_y = \frac{y}{r}$$

(II.5)

$$\Omega_{\varrho} = \mu \left(\varrho - \frac{1}{2\varrho} \right); \quad \varrho_x = \frac{x-m}{\varrho}, \quad \varrho_y = \frac{y}{\varrho}$$

Wie aus (II.3) zu ersehen ist, besitzt $\Omega(x, y)$ keine reellen Nullstellen, da die Potentialfunktion ja überall positiv ist. Dafür hat

$\Omega(x, y)$ in der (x, y) -Ebene gewisse Minimalstellen, von denen wir wegen (II.1) bereits jetzt schon sagen können, daß sie symmetrisch zur x -Achse, beziehungsweise nur auf dieser selbst liegen können. Denn entfernt man aus der (x, y) -Ebene einmal zwei offene Kreisscheiben mit den Mittelpunkten in $(-\mu, 0)$ bzw. $(m, 0)$ und den hinreichend kleinen Radien r_0 bzw. ϱ_0 und zum anderen die Men-

ge $\left\{ (x,y) / \sqrt{x^2 + y^2} > R_0 \right\}$ mit hinreichend großem R_0 so erhalten wir ein dreifach zusammenhängendes Kompaktum K_0 , auf dem für die dort stetige Funktion $\Omega(x,y)$ nach einem bekannten Satz von WEIERSTRASZ die Existenz wenigstens einer Minimalstelle gesichert ist. Weil aber $\Omega \rightarrow +\infty$ ist für $R \rightarrow \infty$ bzw. für $r \rightarrow 0$ oder $\varrho \rightarrow 0$, lassen sich R_0 so groß bzw. r_0 und ϱ_0 so klein wählen, daß die in Frage kommenden Extremalstellen sicher im Innern von K_0 liegen müssen, es sich also um lokale Minima handelt. Da die Potentialfunktion im betrachteten Gebiet reellanalytisch in x und y ist, gilt als notwendige Bedingung für diese Minima, daß für sie unter Berücksichtigung von (II.5)

$$(II.4') \quad \begin{aligned} \Omega_x &= \Omega_r r_x + \Omega_\varrho \varrho_x = 0 \\ \Omega_y &= \Omega_r r_y + \Omega_\varrho \varrho_y = 0 \end{aligned} \quad \text{ist.}$$

Die Gleichungen (II.4') sind wegen (II.5) offenbar erfüllt, wenn

$$(II.6) \quad r = \varrho = 1.$$

Da in diesem Fall die beiden Punkte gleichseitige Dreiecke mit den Orten der beiden Hauptkörper bilden, benennen wir sie nach seinem Entdecker LAGRANGESche Dreieckspunkte.

Sind hingegen r und ϱ nicht beide gleich 1, so lassen die homogenen linearen Gleichungen (II.4') für Ω_r und Ω_ϱ Lösungen nur zu, falls die Determinante

$$(II.7) \quad \begin{vmatrix} r_x & \varrho_x \\ r_y & \varrho_y \end{vmatrix} = \frac{y(m+\mu)}{r \cdot \varrho} = \frac{y}{r \varrho}$$

verschwindet. Wie schon oben erwähnt, müssen also eventuelle weitere Extrema sämtlich auf der x -Achse liegen.

Untersuchen wir zunächst einmal die LAGRANGESchen Dreieckspunkte. Hierzu bilden wir vermittels (II.4) die partiellen Ableitungen

zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{xx} &= \Omega_{rr} r_x^2 + \Omega_{\varphi\varphi} \varphi_x^2 + \Omega_r r_{xx} + \Omega_{\varphi} \varphi_{xx}, \\
 (II.8) \quad \Omega_{xy} &= \Omega_{rr} r_x r_y + \Omega_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_y + \Omega_r r_{xy} + \Omega_{\varphi} \varphi_{xy}, \\
 \Omega_{yy} &= \Omega_{rr} r_y^2 + \Omega_{\varphi\varphi} \varphi_y^2 + \Omega_r r_{yy} + \Omega_{\varphi} \varphi_{yy},
 \end{aligned}$$

wobei neben (II.5)

$$\begin{aligned}
 \Omega_{rr} &= m \left(1 + \frac{2}{r^3}\right); \quad \Omega_{\varphi r} = 0; \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \mu \left(1 + \frac{2}{\varphi^3}\right). \\
 (II.9) \quad r_{xx} &= \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{x+\mu}{r}\right)^2\right]; \quad r_{xy} = -\frac{(x+\mu)y}{r^3}; \quad r_{yy} = \frac{1}{r} \left[1 - \left(\frac{y}{r}\right)^2\right] \\
 \varphi_{xx} &= \frac{1}{\varphi} \left[1 - \left(\frac{x-m}{\varphi}\right)^2\right]; \quad \varphi_{xy} = -\frac{(x-m)y}{\varphi^3}, \quad \varphi_{yy} = \frac{1}{\varphi} \left[1 - \left(\frac{y}{\varphi}\right)^2\right]
 \end{aligned}$$

zu berücksichtigen ist.

Für die beiden Dreieckspunkte gilt mit (II.6)

$$(II.10) \quad x = \frac{1}{2} - \mu, \quad y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

und somit nach (II.5) und (II.8)

$$\begin{aligned}
 r_x &= \frac{1}{2}, \quad r_y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad \varphi_x = -\frac{1}{2}, \quad \varphi_y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{3} \\
 \Omega_r &= \Omega_{\varphi} = \Omega_{\varphi r} = 0, \quad \Omega_{rr} = 3m, \quad \Omega_{\varphi\varphi} = 3\mu
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir aus (II.9)

$$(II.11) \quad \Omega_{xx} = \frac{3}{4}, \quad \Omega_{xy} = \pm \frac{3}{4} \sqrt{3} (m - \mu) = \pm \frac{3}{4} \sqrt{3} (1 - 2\mu), \quad \Omega_{yy} = \frac{9}{4},$$

wobei für den Dreieckspunkt in der oberen Halbebene jeweils das obere Vorzeichen, für den Dreieckspunkt in der unteren Halbebene entsprechend das untere Vorzeichen zu nehmen ist. Da mithin wegen $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$

$$(II.12) \quad \Omega_{xx} \quad \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = \frac{27}{16} [1 - (1 - 2\mu)^2] > 0$$

und dort Ω_{xx} und Ω_{yy} nach (II.11) positiv sind, handelt es

sich um echte Minima der Potentialfunktion in den beiden Dreieckspunkten.

Wenden wir uns nun den übrigen Extrema von $\Omega(x, y)$ zu, die gemäß (II. 7) alle auf der x -Achse liegen müssen. Nehmen wir aus dieser die drei Punkte heraus, in denen die Potentialfunktion unendlich wird, so zerfällt sie in folgende drei Intervalle:

$$I_1: -\mu < x < m, \quad I_2: x > m, \quad I_3: x < -\mu.$$

Damit gilt offenbar wegen (II. 3) und (II. 5) auf

$$\begin{aligned} I_1: r &= x + \mu, \quad g = 1 - r = m - x; & r_x &= - & g_x &= +1 \\ \text{(II. 13)} \quad I_2: r &= x + \mu, \quad g = r - 1 = x - m; & r_x &= & g_x &= +1 \\ I_3: r &= -(x + \mu), \quad g = r + 1 = m - x; & r_x &= & g_x &= -1 \end{aligned}$$

und daraus weiter in Verbindung mit (II. 9) auf allen den Intervallen

$$r_{xx} = r_{xy} = g_{xx} = g_{xy} = 0; \quad r_{yy} = \frac{1}{r}; \quad g_{yy} = \frac{1}{g}; \quad \Omega_{rr}, \Omega_{gg} > 0$$

und somit wegen (II. 8) auf allen drei Intervallen

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= m \left(1 + \frac{2}{r^3}\right) + \mu \left(1 + \frac{2}{g^3}\right) > 0 \\ \text{(II. 14)} \quad \Omega_{yy} &= \frac{1}{r} \Omega_r + \frac{1}{g} \Omega_g = m \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \mu \left(1 - \frac{1}{g^3}\right) \\ \Omega_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, daß $\Omega(x, 0)$ auf allen drei Intervallen streng konvex ist, also jeweils höchstens ein Minimum in jedem dieser Intervalle haben kann. Die Existenz aller dieser drei Minima von $\Omega(x, 0)$ in den drei Intervallen gewährleistet uns ein bekannter Satz von DARBOUX (welcher besagt, daß die Ableitung $f'(x)$ einer auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ differenzierbaren Funktion $f(x)$ in (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ annimmt, wenn nur $f'(a) \neq f'(b)$ ist), wenn wir berücksichtigen, daß mit (II. 13), (II. 5) und der ersten Gleichung von (II. 4)

$\Omega_x(x, 0)$ gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$ geht, je nachdem

wir x aus dem Innern des jeweiligen Intervalls gegen den rechten bzw. linken Randpunkt des Intervalls konvergieren lassen. Diese drei lokalen Minima der Funktion $\Omega(x, 0)$, die wegen (II.5) und der zweiten Gleichung von (II.4) auch lokale Extrema von $\Omega(x, y)$ (und zwar, wie eben gezeigt, die einzigen dieser Potentialfunktion auf der x -Achse) sind, bezeichnen wir , je nachdem in welchem der drei Intervalle l_1 bis l_3 sie liegen, mit L_1 , L_2 bzw. L_3 und in ihrer Gesamtheit nach H. GYLDEŃ als kollineare Librationszentren. Im Gegensatz hierzu benennen wir die LAGRANGEschen Dreieckspunkte auch dreieckige Librationszentren, die wir fortan auch mit L_4 bzw. L_5 bezeichnen, je nachdem dieses Librationszentrum in der oberen oder in der unteren Halbebene liegt. Librationszentren heißen diese fünf LAGRANGEschen Punkte, da sie selbst Gleichgewichtslösungen unseres Problems darstellen und unter gewissen Einschränkungen um jeden dieser fünf Punkte periodische Lösungen des Eingeschränkten Dreikörperproblems möglich sind, wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden.

Doch untersuchen wir noch rasch den Charakter der drei kollinearen Librationszentren! Die erste Gleichung von (II.4') ergibt in Verbindung mit (II.13) sofort für

$$\begin{aligned} L_1 : \quad \Omega_r - \Omega_g &= 0 \\ (II.15) \quad L_2 : \quad \Omega_r + \Omega_g &= 0 \\ L_3 : \quad \Omega_r + \Omega_g &= 0 \end{aligned}$$

In L_1 ist aber $r + g = 1$, also $r < 1$, $g < 1$ und somit nach (II.14) $\Omega_{yy} < 0$. In L_2 und L_3 dagegen gilt nach (II.5) und (II.15)

$$m \left(r - \frac{1}{r^2} \right) = \Omega_r = - \Omega_g = - \mu \left(g - \frac{1}{g^2} \right)$$

und damit unter Berücksichtigung von (II.14)

$$(II.16) \quad \Omega_{yy} = m \left(r - \frac{1}{r^2} \right) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{g} \right) = \mu \left(g - \frac{1}{g^2} \right) \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{r} \right)$$

Für L_2 betrachten wir hierin das mittlere Produkt: Nach (II.13) gilt für L_2 $r = 1 + \varrho$, also $r > \varrho$ und somit ist die erste der Klammern positiv, die zweite negativ.

In L_3 dagegen ist nach (II.13) $\varrho = 1 + r$, also $\varrho > r$ und somit die rechte Seite von (II.16) negativ.

Es gilt also in allen drei kollinearen Librationszentren für die zweite Gleichung von (II.14)

$$(II.17) \quad \Omega_{yy} [x_{L_v}, 0] = m \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) + \mu \left(1 - \frac{1}{\varrho^3}\right) < 0, \quad v = 1, 2, 3.$$

Hiermit und auf Grund der dritten Gleichung aus (II.14) erhalten wir also für alle drei kollinearen Librationszentren

$$(II.18) \quad \Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = \Omega_{xx} \Omega_{yy} < 0$$

womit es sich hier also nur um Sattelpunkte der Potentialfunktion handelt.

§ 5. Numerische Werte der Potentialfunktion in den Librationszentren.

Aufbauend auf dem vorigen Paragraphen setzen wir uns hier zum Ziel, für unsere Potentialfunktion $\Omega(x, y)$ in der Gestalt von (II.3) folgende Ungleichung zu beweisen:

$$(II.19) \quad \Omega_1 > \Omega_2 \geq \Omega_3 > \Omega_4 = \Omega_5 = \frac{3}{2}$$

wobei $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_5$ die Werte bedeuten, die die Potentialfunktion für gegebene Massen $\mu, m = 1 - \mu$, ($0 < \mu \leq \frac{1}{2}$), in den Librationszentren $L_1, L_2, \dots, L_5$ annimmt. Von der Gültigkeit dieser Ungleichung überzeugt man sich gewöhnlich dadurch, daß man für eine Reihe von μ -Werten zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ numerisch zunächst die Koordinaten der kollinearen Librationszentren und mit ihrer Hilfe dann ebenfalls numerisch deren Funktionswerte berechnet. Das Gleichheitszeichen zwischen Ω_4 und Ω_5 ist natürlich eine

unmittelbare Folge von (II. 1) und (II. 10), wobei die beiden Funktionswerte sich nach (II. 3) zu $\frac{3}{2}$ ergeben, das Ungleichheitszeichen zwischen Ω_4 , Ω_5 und Ω_3 dagegen eine Folge von (II. 12) und (II. 18). Eine Gleichheitsbeziehung zwischen Ω_2 und Ω_3 gilt wegen (II. 1'), (II. 2') nur für den Grenzfall $\mu = m = \frac{1}{2}$. Es ist also nur noch nachzuweisen, daß

$$(II. 20) \quad \Omega_1 > \Omega_2 \geq \Omega_3$$

und es soll genügen, dies für zwei Grenzfälle, nämlich für sehr kleine μ und für $\mu = m = \frac{1}{2}$ exakt zu beweisen.

Fall 1: Sei μ sehr klein.

Zur Berechnung der Abszisse von L_1 setzen wir zunächst

$$(II. 21) \quad \lambda =: \frac{\vartheta}{r}$$

womit wegen (II. 13) sofort $\lambda r = \vartheta = 1 - r$ und damit

$$(II. 22) \quad r = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \vartheta = \frac{1}{1+\lambda}$$

ist. Damit erhalten wir mit (II. 15) nach kurzer Rechnung

$$(II. 23) \quad [\lambda^5 + 3 \lambda^4 + 3 \lambda^3] - \frac{\mu}{m} [3 \lambda^2 + 3 \lambda + 1] = 0$$

oder also

$$(II. 24) \quad \lambda^3 = \frac{\mu}{3m} \frac{1 + 3\lambda + 3\lambda^2}{1 + \lambda + \frac{1}{3}\lambda^2}; \quad m = 1 - \mu$$

Wird nun μ sehr klein, so wird auch λ verhältnismäßig klein und man kann angenähert

$$(II. 25) \quad \lambda \approx \sqrt[3]{\frac{\mu}{3m}} =: \nu$$

Eine exakte Lösung von (II. 23) erhalten wir durch den Ansatz

$$\lambda = \nu + a \nu^2 + b \nu^3 + c \nu^4 + \dots$$

und anschließendem Koeffizientenvergleich zu

$$\lambda = \sqrt{v} + \frac{2}{3} \sqrt{v}^2 + \frac{2}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{32}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

Dies liefert und für unsere kleinen λ mit (II.22), (II.13) sofort

$$(II.26) \quad r = 1 - \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 + \frac{1}{9} \sqrt{v}^3 + \frac{23}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

$$\varphi = \sqrt{v} - \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{1}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{23}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

Nach Definition von $\sqrt{v}$ in (II.26) erhalten wir

$$(II.27) \quad \mu = 3 \sqrt{v}^3 - 9 \sqrt{v}^6 + \dots$$

und daraus dann mit (II.13), (II.26) für die Abszisse des LAGRANGESchen Librationszentrums L_1

$$(II.26^*) \quad x_{L_1} = 1 - \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{26}{9} \sqrt{v}^3 + \frac{23}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

Wenden wir uns nun dem LAGRANGESchen Librationszentrum L_2 zu. Setzen wir hier $\lambda = \varphi$, so erhalten wir nach (II.13)

$$(II.28) \quad \lambda = \varphi, \quad r = 1 + \lambda, \quad x = r - \mu$$

und damit und mit (II.15) für L_2 nach kurzer Rechnung

$$(II.29) \quad [\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3] - \frac{\mu}{m} (1 + \lambda)^2 (1 - \lambda^3) = 0.$$

Wie wir sehen, erhalten wir für sehr kleine μ und damit kleine Werte von λ in erster Näherung λ in Gestalt von (II.25).

Drückt man wiederum λ durch eine Reihe aus, so erhält man nun

$$\lambda = \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{1}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{31}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

oder also mit (II.28) und (II.27)

$$(II.30) \quad \begin{aligned} \varphi &= \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{1}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{31}{81} \sqrt{v}^4 + \dots \\ r &= 1 + \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{1}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{31}{81} \sqrt{v}^4 + \dots \end{aligned}$$

$$x_{L_2} = 1 + \sqrt{v} + \frac{1}{3} \sqrt{v}^2 - \frac{28}{9} \sqrt{v}^3 - \frac{31}{81} \sqrt{v}^4 + \dots$$

Zur Berechnung von L_3 setzen wir $\lambda = \frac{1}{r}$ und somit aus (II.13)

$$(II.31) \quad r = \frac{1}{\lambda}, \quad \vartheta = \frac{1+\lambda}{\lambda}; \quad x = -r - \mu$$

und (II.15)

$$(II.32) \quad [\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda - 1] - \frac{\mu}{m} (3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0$$

Da diese Gleichung für $\mu = 0$ die Wurzel $\lambda = 1$ hat, setzen wir

$$(II.33) \quad \lambda = 1 + \sigma$$

und erhalten damit aus (II.23) folgende Bezeichnung für σ :

$$(II.34) \quad \sigma^5 + 7\sigma^4 + 19\sigma^3 + 24\sigma^2 + 12\sigma + \frac{\mu}{m} (3\sigma^3 + 9\sigma + 7) = 0$$

Für sehr kleine μ und damit für sehr kleine σ erhalten wir die genäherte Lösung zu

$$\sigma \approx \frac{7}{12} \frac{\mu}{1-\mu}$$

Eine exakte Lösung liefert der Ansatz

$$\sigma = \frac{7}{12} \mu + a \mu^2 + b \mu^3 + \dots$$

Daraus und aus (II.34), (II.33) folgt schließlich

$$\lambda = 1 + \frac{7}{12} \mu + \frac{49}{144} \mu^2 + O(\mu^3)$$

und mit (II.31)

$$(II.35) \quad \begin{aligned} r &= 1 - \frac{7}{12} \mu + O(\mu^3) \\ \vartheta &= 2 - \frac{7}{12} \mu + O(\mu^3) \\ x_{L_3} &= -1 - \frac{5}{12} \mu + O(\mu^3) \end{aligned}$$

Berechnen wir nun mit (II.26), (II.30), (II.35), (II.3) die Werte

unserer Potentialfunktion in den kolinearen Librationszentren. Für unsere Potentialfunktion gilt ja allgemein

$$(II.3) \quad 2 \Omega = m \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \mu \left(\vartheta^2 + \frac{2}{\vartheta} \right), \quad m + \mu = 1$$

Nach (II.13) galt für unser Librationszentrum L_1 $r = 1 - \vartheta$.

Da nach Voraussetzung μ und somit nach (II.25) auch ν und damit nach (II.26) auch ϑ sehr klein sein sollte, erhalten wir aus (II.3) sofort nach der Entwicklung des Terms $\frac{1}{1-\vartheta}$

$$2 \Omega(x_{L_1}, 0) = (1-\mu) [1-2\vartheta + \vartheta^2 + 2(1+\vartheta + \vartheta^2 + \vartheta^3 + \dots)] + \mu \left(\vartheta^2 + \frac{2}{\vartheta} \right)$$

Setzen wir hierin für ϑ und μ die Beziehungen aus (II.26) und (II.27) ein, so erhalten wir nach einiger Rechnung

$$(II.36) \quad 2 \Omega(x_{L_1}, 0) = 3 + 9 \nu^2 - 7 \nu^3 + \frac{1}{3} \nu^4 + O(\nu^5)$$

Für das Librationszentrum L_2 berücksichtigen wir in (II.3) die Beziehung (II.28). Da auch hier nach (II.25) und (II.30) für kleines μ auch ν und ϑ klein bleibt, erhalten wir ähnlich wie oben schließlich

$$(II.37) \quad 2 \Omega(x_{L_2}, 0) = 3 + 9 \nu^2 - 11 \nu^3 + \frac{1}{3} \nu^4 + O(\nu^5)$$

Ganz entsprechend erhalten wir aus (II.3) und (II.35) wegen (II.27) für L_3

$$(II.38) \quad 2 \Omega(x_{L_3}, 0) = 3 + 6 \nu^3 - \frac{337}{16} \nu^6 + O(\nu^9)$$

Da für sehr kleine μ , ($0 < \mu \leq \frac{1}{2}$) nach (II.25) auch ν klein bleibt, haben wir mit (II.36), (II.37), (II.38) die Gültigkeit der Ungleichung (II.20) bzw. von (II.19) für den einen Grenzfall nachgewiesen.

Fall 2: Wenden wir uns nun dem anderen Grenzfall, dem sogenannten Kopenhagenproblem zu, wo $m = \mu = \frac{1}{2}$ ist. Neben der Folgerung von (II.2): $\Omega_y(x, 0) = 0$ haben wir als Folgerung von (II.2') außerdem $\Omega_x(0, y) = 0$. Für $x = y = 0$ haben wir also die Koordinaten von L_1 , die hier mit dem Schwerpunkt unserer beiden Hauptkörper zusammenfallen. Da also mit $m = 1 - \mu = \frac{1}{2}$ $\vartheta = r = \frac{1}{2}$ wird, erhalten wir in L_1 sofort den Potentialwert von L_2 nach (II.3) zu

$$(II.39) \quad 2 \Omega(0, 0) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + 2 \right] = 2 + \frac{1}{4}.$$

Zur Berechnung der anderen beiden kollinearen Librationszentren und der dortigen Potentialwerte bedienen wir uns wiederum der Symmetrien (II.1'), (II.2'). Wir haben also nur einen der beiden verbleibenden kollinearen Librationszentren und dessen Potentialwert zu berechnen. Bevorzugen wir L_2 und bedienen wir uns der Formel (II.29), so erhalten wir mit $m = \mu = \frac{1}{2}$ sofort

$$(II.40) \quad 2 \lambda^5 + 5 \lambda^4 + 4 \lambda^3 - (1 + \lambda)^2 = 0,$$

wobei hier nach (II.28) $\lambda = \vartheta$ ist. Nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen existiert in dem hier in Frage kommenden Intervall l_2 genau eine positive Wurzel von (II.40). Diese ergibt sich näherungsweise zu $\lambda_0 = 0,698406 \dots$

womit wir nach (II.28) sofort

$$\vartheta = 0,698406 \dots, \quad r = 1,698406 \dots, \quad x_{L_2} = -x_{L_3} = 1,198406 \dots$$

erhalten. Der Potentialwert hierzu ergibt sich damit zu

$$2 \Omega(x_{L_3}, 0) = 2 \Omega(x_{L_2}, 0) \approx 3,7 \dots$$

womit also auch für diesen Grenzfall (II.20) bzw. (II.19) verifiziert ist.

§ 6. Die HILLschen Grenzkurven.

Im dritten Paragraphen hatten wir für das Eingeschränkte Dreikörperproblem das JACOBIsche Integral (I.22)

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 \Omega(x, y) - c$$

gefunden, wo c eine für jede spezielle Bahn konstante Größe, die JACOBIsche Konstante, darstellt. HILL hat gezeigt, daß diese Gleichung benutzt werden kann, um die Bereiche der (x, y) -Ebene abzugrenzen, auf die alle reellen, durch einen bestimmten Wert der JACOBIschen Konstante charakterisierten Bewegungen des Probekörpers beschränkt bleiben. Da nämlich für eine und dieselbe Bahn stets $v^2 \geq 0$ ist, muß in jedem ihrer Punkte die Ungleichung $2 \Omega(x, y) \geq c$ erfüllt sein. Ist also eine Bahnkurve des Probekörpers mit der JACOBIschen Konstanten c gegeben, so stellt die Kurve

$$(II.41) \quad v^2 = f(x, y) = 2 \Omega(x, y) - c = 0$$

eine Schranke dar, die der Probekörper während der ganzen Dauer seiner Bewegung nicht überschreiten kann. Er hält sich stets auf derjenigen Seite der Kurve auf, für die $f(x, y) > 0$. Natürlich hängt es von der individuellen Wahl der Bahnkurve ab, ob der Probekörper seine HILLSche Grenzkurve jemals erreicht. Sind aber die Anfangsbedingungen zu einem Zeitpunkt t_0 so vorgegeben, daß er zu einem Zeitpunkt t_1 seine HILLSche Grenzkurve - etwa in (x_1, y_1) - erreicht, so wird nach (II.41) seine Geschwindigkeit im rotierenden Koordinatensystem Null. Damit erhalten wir aus (I.20), daß

$$(II.42) \quad \begin{aligned} \ddot{x}(t_1) &= \Omega_x(x_1, y_1) \\ \ddot{y}(t_1) &= \Omega_y(x_1, y_1) \end{aligned}$$

die Beschleunigung des Probekörpers zu diesem Zeitpunkt übereinstimmt mit dem Gradienten der Potentialfunktion im Punkt (x_1, y_1) . Ist dieser Gradient von Null verschieden (was nach Paragraph 4 mit Ausnahme der fünf LAGRANGESchen Libellengleichgewichte nicht

der Fall ist), so erhalten wir aus (II.42) und der Regel von DE L'HOPITAL, daß der Probekörper, aus dem für ihn^{er}laubten Gebiet^{er} kommend, nach (II.41) senkrecht auf seine HILLsche Grenzkurve trifft und diese wieder senkrecht verläßt, dort also einen Umkehrpunkt hat.

Nach (II.19) und (II.41) existieren für $c < 3$ keine HILLschen Grenzkurven. Soweit es die übrigen Bedingungen zulassen, kann sich der Probekörper dann also in der ganzen $\{x, y\}$ -Ebene bewegen.

Für $c > 3$ gibt es dagegen stets "verbotene Gebiete", in die der Probekörper unter keinen Umständen eindringen kann und deren Begrenzung nach (II.41) und (II.3)

$$(II.43) \quad c = 2 \Omega^2 = m \left(r^2 + \frac{2}{r} \right) + \mu \left(\vartheta^2 + \frac{2}{\vartheta} \right), \quad \mu + m = 1$$

gegeben ist. Deuten wir - wie zu Beginn dieses Kapitels bereits erwähnt - unsere Potentialfunktion als Fläche im dreidimensionalen Raum, so fällt also die Schar ihrer Niveaulinien mit der Schar der HILLschen Grenzkurven zusammen, die wegen (II.1) stets symmetrisch zur x -Achse sind. Die Schar der HILLschen Grenzkurven überdeckt die $\{x, y\}$ -Ebene also schlicht. Ist c sehr groß, so läßt sich (II.43) nur erfüllen, wenn r oder ϑ sehr klein ist oder wenn r und ϑ beide sehr groß sind. Im erstgenannten Fall lautet (II.43) genähert

$$(II.44) \quad r = \frac{2m}{c} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \frac{2\mu}{c},$$

im zweiten Fall dagegen, ebenfalls genähert nach der Gleichung vor (II.3),

$$(II.45) \quad mr^2 + \mu\vartheta^2 \approx x^2 + y^2 = c.$$

Die Grenzkurve besteht damit aus drei voneinander getrennten Zweigen, nämlich aus zwei kreisähnlichen Kurven (II.44) um die beiden Hauptkörper, deren Radien klein von der Ordnung $1/c$ und den Massen m bzw. μ proportional sind, und aus einer ebenfalls kreisähn-

lichen Kurve (II.45), die das System der beiden Hauptkörper in sehr weitem Abstand umschließt und deren Halbmesser von der Ordnung $\sqrt{c}$ ist. Alle denkbaren Bahnen mit der sehr großen JACOBI'schen Konstanten c liegen also innerhalb der beiden kleinen "Kreise" (Satelliten) oder außerhalb des großen Kreises (entfernte Begleiter eines engen Doppelsterns); denn nur dort ist $2\Omega > c$.

Nimmt c von großen Anfangswerten ab, so wird es nach (II.19) nacheinander die Werte $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, $2\Omega_3$ durchlaufen, bis schließlich $c = 2\Omega_4 = 2\Omega_5$ erreicht ist; es schrumpft dann die Schar der HILL'schen Grenzkurven auf die beiden dreieckigen Librationszentren zusammen.

Für die speziellen Werte $c = 2\Omega_1$, $2\Omega_2$, $2\Omega_3$ geht die Ebene $z = c$ durch die am Schluß von Paragraph 4 in L_1 , L_2 , L_3 nachgewiesenen Sattelpunkte der Potentialfläche. Die entsprechenden HILL'schen Grenzkurven haben also an diesen Stellen Doppelpunkte mit zwei reellen Tangenten. Im Falle $c = 2\Omega_1$, der wegen (II.19) zuerst erreicht wird, wenn c von großen Werten her abnimmt, werden also die beiden kreisähnlichen Kurven (II.44) aneinanderstoßen und eine lemniskatenähnliche Kurve bilden, deren Doppelpunkt in L_1 liegt. Für $2\Omega_1 > c > 2\Omega_2$ fließen die beiden "Kreise" zu einer sanduhrförmigen Kurve zusammen, die die beiden Hauptkörper umschließt. Während also für $c > 2\Omega_1$ ein Satellit einen gewissen Bereich um seinen Zentralkörper niemals verlassen kann, wird dies für $c < 2\Omega_1$ möglich. Es öffnet sich bei L_1 eine zunächst enge, mit abnehmendem c aber immer breiter werdende Lücke, durch die der Probekörper aus dem Anziehungsbereich des einen Hauptkörpers in den des anderen hinüberwechseln kann. Ist $c = 2\Omega_2$, so entsteht ein Doppelpunkt in L_2 , in dem die sanduhrförmige Kurve mit der inzwischen immer enger gewordenen äußeren Grenzkurve in diesem Punkt zusammenfällt. Für $2\Omega_2 > c > 2\Omega_3$ wird die Grenzkurve dann nur noch aus einem einzigen Kurvenzug bestehen, der den verbotenen Bereich umschließt und dessen Form man mit einem Hufeisen vergleichen

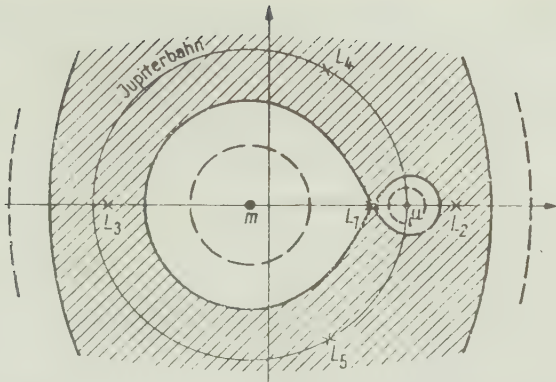


Abb. I a. Hillsche Grenzkurven, schematisch
 --- für $C > 2\Omega_1$; — für $C = 2\Omega_1$ (verbotenes Gebiet schraffiert)

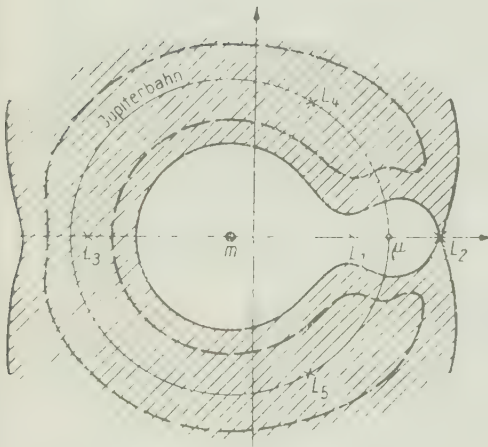


Abb. I b
 Hillsche Grenzkurve, schematisch

- für $C = 2\Omega_2$, Sichelkurve (verbotenes Gebiet schraffiert);
- für $2\Omega_2 > C > 2\Omega_3$ (verbotenes Gebiet hufeisenförmig begrenzt)

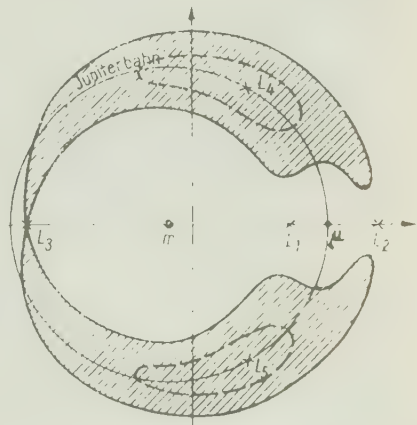


Abb. I c
 Hillsche Grenzkurve, schematisch

- für $C = 2\Omega_3$ (verbotenes Gebiet schraffiert);
- für $2\Omega_3 > C > 2\Omega_4 = 3$ (zwei getrennte verbotene Gebiete, bohnenförmig begrenzt)

kann. Ist $c = 2 \Omega_3$, so schnürt sich das "Hufeisen" in der Mitte bei L_3 ein und bildet dort wiederum einen Doppelpunkt. Nimmt c noch weiter ab, so zerfällt die Kurve in zwei zur x -Achse symmetrisch liegende bohnenförmige Teilkurven, die zwei getrennte verbundene Bereiche begrenzen, während die ganze übrige Ebene nunmehr für die Bewegung frei geworden ist. Im Innern dieser geschlossenen Teilbereiche liegen die Librationszentren L_4 und L_5 , auf die sich die Grenzkurve zusammenzieht, wenn c den Wert 3 erreicht.

Wenn wir von den drei Punkten, wo die Potentialfunktion $+\infty$ wird (also den Koordinaten der beiden Hauptkörper und dem unendlich fernen Punkt) und den fünf Librationszentren (wo der Gradient der Potentialfunktion verschwindet) absehen, so läßt sich in jedem Punkt (x_1, y_1) der (x, y) -Ebene nach dem Hauptsatz über die Auflösbarkeit impliziter Funktionen und dessen Folgerungen die Tangente der durch diesen Punkt (x_1, y_1) hindurchgehenden HILLschen Grenzkurve angeben. Ihre Richtung ist bekanntlich nach (II. 41) für den Fall, daß die partielle Ableitung der Potentialfunktion nach y in (x_1, y_1) nicht verschwindet, gegeben durch

$$(II. 46) \quad \frac{dy[x_1]}{dx} = - \frac{\Omega_{x[x_1, y_1]}}{\Omega_{y[x_1, y_1]}} ,$$

dagegen für den Fall, daß die partielle Ableitung der Potentialfunktion nach x dort nicht verschwindet, durch

$$(II. 47) \quad \frac{dx[y_1]}{dy} = - \frac{\Omega_{y[x_1, y_1]}}{\Omega_{x[x_1, y_1]}} .$$

Somit können zum Beispiel alle HILLschen Grenzkurven (mit etwaiger Ausnahme der drei Grenzkurven, die durch die drei kollinearen Librationszentren gehen), die x -Achse nach (II. 2) und (II. 47) immer nur senkrecht schneiden. Eine entsprechende Aussage gilt außerdem wegen (II. 21) für die HILLschen Grenzkurven des Kopenhagener Problems ($m = \mu = \frac{1}{2}$) in bezug auf die y -Achse, wenn wir von den hier auf der y -Achse liegenden LAGRANGESchen Dreiecks-

punkten absehen, die ja immer singuläre Punkte der Schar der HILLschen Grenzkurven darstellen und in denen (als Minima der Potentialfunktion) keine reelle Tangente existiert. Doch wie steht es nun um die nach Paragraph 4 noch verbleibenden Punkte, in denen der Gradient der Potentialfunktion verschwindet (den Sattelpunkten von Ω): die kollinearen Librationszentren?

Hierzu betrachten wir einen Ast der HILLschen Grenzkurve, die durch ein kollineares Librationszentrum - etwa durch L_1 - hindurchgeht, und zwar auf dieses Librationszentrum hin, wobei wir unsere Aufmerksamkeit zunächst (II. 46) zuwenden. Nach (II. 2) wissen wir, daß Ω_y auf der ganzen (offenen) x-Achse (mit Ausnahme der Koordinaten der beiden Hauptkörper) verschwindet. Wegen der Gültigkeit der Ungleichung (II. 17) in L_1 und der Reellanalytizität unserer Potentialfunktion läßt sich um L_1 eine ganze (etwa kreisförmige) Umgebung angeben, in der die Ungleichung (II. 17) gilt und somit Ω_y in dieser Umgebung nur in deren Durchschnitt mit der x-Achse verschwindet. Wir nehmen nun an, wir seien auf dem betrachteten Ast unserer HILLschen Grenzkurve bereits in diese Umgebung eingedrungen. Die Richtung der Tangente in L_1 erhalten wir dann (falls sie dort überhaupt existiert) nach der Regel von DE L'HOPITAL aus (II. 46) zu

$$y'[x_{L_1}] = - \frac{\Omega_{xx}[x_{L_1}, 0] + y'[x_{L_1}] \Omega_{xy}[x_{L_1}, 0]}{\Omega_{xy}[x_{L_1}, 0] + y'[x_{L_1}] \Omega_{yy}[x_{L_1}, 0]}$$

oder also aus der quadratischen Gleichung

$$\Omega_{yy}[x_{L_1}, 0] (y'[x_{L_1}])^2 + 2 \Omega_{xy}[x_{L_1}, 0] y'[x_{L_1}] + \Omega_{xx}[x_{L_1}, 0] = 0$$

zu

$$(II. 48) \quad y'[x_{L_1}] = - \frac{\Omega_{xy}[x_{L_1}, 0]}{\Omega_{yy}[x_{L_1}, 0]} \pm \sqrt{\frac{\Omega_{xy}^2[x_{L_1}, 0] - \Omega_{xx}[x_{L_1}, 0] \Omega_{yy}[x_{L_1}, 0]}{\Omega_{yy}^2[x_{L_1}, 0]}}$$

Wegen (II.2) und (II.18) werden die beiden Tangentenrichtungen der durch L_1 hindurchgehenden HILLschen Grenzkurve in diesem kollinearen Librationszentrum L_1 gegeben durch

$$(II.49) \quad y'^{[x_{L_1}]} = \pm \sqrt{-\frac{\Omega_{xx}^{[x_{L_1}, 0]}}{\Omega_{yy}^{[x_{L_1}, 0]}}}.$$

In gleicher Weise erhalten wir die Tangentenrichtungen der durch die beiden anderen kollinearen Librationszentren hindurchgehenden HILLschen Grenzkurven in L_2 bzw. L_3 . Die Gleichungen haben die gleiche Gestalt wie (II.49), nur daß eben die Koordinaten von L_2 bzw. L_3 statt von L_1 zu nehmen sind.

§ 7. Der Spiegelungssatz und Folgerungen.

Unter den in Paragraph 2 (I.21) vereinbarten Normierungen lauten nach (I.20) die Bewegungsgleichungen des Probekörpers

$$(II.50) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x[x, y] \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y[x, y] \end{aligned}$$

wobei $\Omega(x, y)$ in (I.23) gegeben ist.

Nach (II.2) mit $p = 1$, $q = 0$ bzw. $p = 0$, $q = 1$ gilt

$$(II.51) \quad \begin{aligned} \Omega_x[x, y] &= + \Omega_x[x, -y] \\ \Omega_y[x, y] &= - \Omega_y[x, -y] \end{aligned}$$

und es läßt sich hiermit ein Satz angeben, der als wesentliche Eigenschaft eine globale Symmetrie von Lösungen des Eingeschränkten Dreikörperproblems aufdeckt, die wir fortan als globale Antisymmetrie bezüglich der x-Achse bezeichnen. In der Literatur bezeichnet man gewöhnlich den hierfür wesentlichen Satz als

Spiegelungssatz: Ist

$$(II.52) \quad z(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{für } t \nearrow, \quad 0 \leq t \leq c, \quad c > 0$$

eine Lösung von (II.50), so ist auch

$$(II.53) \quad \tilde{z}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) := (x(2c-t), -y(2c-t)) \quad \text{für } t \nearrow, \\ c \nearrow t \leq 2c$$

eine Lösung von (II.50).

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen:

Zunächst bleibt mit der Lösung (II.52) wegen der Symmetrie der Potentialfunktion (II.1) für das Intervall $[c, 2c]$ die durch (II.52) dargestellte Kurve im Regularitätsbereich von Ω und sowohl $x(t)$ als auch $y(t)$ stellen dort beliebig oft nach t differenzierbare Funktionen dar. Wir setzen $2c - t =: \tau$. Dann gilt nach (II.50)

$$(II.54) \quad \begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}(t) - 2\dot{\tilde{y}}(t) &= \ddot{x}[2c-t] - 2\dot{y}[2c-t] = \ddot{x}[\tau] - 2\dot{y}[\tau] \\ \ddot{\tilde{y}}(t) + 2\dot{\tilde{x}}(t) &= -\ddot{y}[2c-t] - 2\dot{x}[2c-t] = -\ddot{y}[\tau] - 2\dot{x}[\tau], \end{aligned}$$

wobei wie bei (II.2) durch die eckigen Klammern die Stelle angegeben, an der nach t differenziert wurde, und weiter beachtet wird, daß nach (II.52) und (II.53) für alle

$$\tau: 0 \leq \tau \leq c \quad \text{auch} \quad c \leq t \leq 2c, \quad \tau = 2c - t$$

gilt. Aus (II.51) und (II.53) dagegen erhalten wir

$$\begin{aligned} \Omega_x[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] &= \Omega_x[x(2c-t), y(2c-t)] = \Omega_x[x(\tau), y(\tau)] \\ \Omega_y[\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)] &= -\Omega_y[x(2c-t), y(2c-t)] = -\Omega_y[x(\tau), y(\tau)] \end{aligned}$$

und daraus, (II.54) und, weil $z(\tau)$ für $0 \leq \tau \leq c$ nach Voraussetzung Lösung von (II.50) ist, die Behauptung.

Da die Aussage dieses Satzes sowohl für das numerische Aufsuchen periodischer Lösungen als auch vom theoretischen Standpunkt aus für periodische Lösungen von großer Bedeutung ist, wollen wir sie an den folgenden Abbildungen näher erläutern (wobei wir nur noch einmal erwähnen wollen, daß es nicht auf die Wahl des Ursprungs der

Zeitachse ankommt, weil (II.50) ja holonom ist).

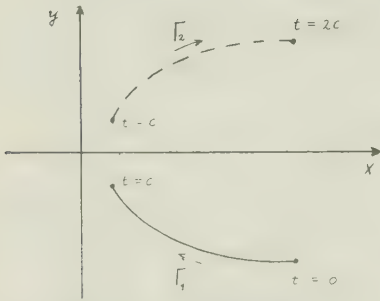


Abb. 1

(Abb. 1) natürlich die gleich JACOBI'sche Konstante. Trifft nun die

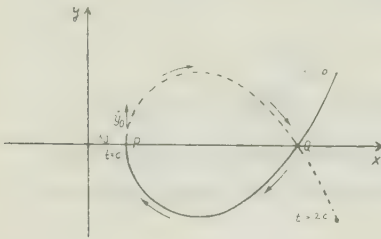


Abb. 2

LINDELÖF genau eine Lösung von (II.50) mit obigen Anfangswerten - gegeben durch Γ_1 bzw. Γ_2 für $t = c$, beide stimmen hier ja

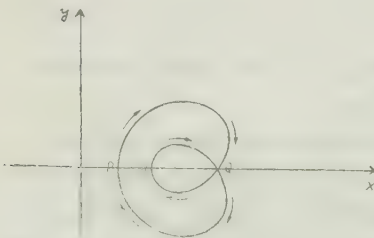


Abb. 3

Ist die Spur der Bahn Γ_1 gegeben, so ist auch die Spur von Γ_2 festgelegt: beide liegen spiegelbildlich zur x-Achse, nicht dagegen die Bahnen selbst (darum auch der Ausdruck "Antisymmetrie").

Dafür haben beide Bahnen nach dem Spiegelungssatz und (II.1) natürlich die gleich JACOBI'sche Konstante. Trifft nun die Bahn Γ_1 - wie in Abbildung 2 angedeutet - zum Zeitpunkt $t = c$ die x-Achse senkrecht in einem regulären Punkt P (durch den nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PICARD -

LINDELÖF genau eine Lösung von (II.50) mit obigen Anfangswerten - gegeben durch Γ_1 bzw. Γ_2 für $t = c$, beide stimmen hier ja

miteinander überein, - existiert) so handelt es sich bei Γ_1 und Γ_2 um zwei Teile ein und derselben Lösung von (II.50). Daraus erhalten wir

sofort den für spätere Betrachtungen wichtigen

Satz: Schneidet eine Lösung des Eingeschränkten Dreikörperproblems zweimal die x -Achse senkrecht, etwa zur Zeit $t = 0$ und $t = c$ ($c \neq 0$), so ist diese Bahn eine periodische Lösung von (II.50).

Hierzu ist folgendes zu bemerken (Abb. 3):

1. Stimmen für $t = 0$ und $t = c$ die Bahnkoordinaten ein erstes Mal miteinander überein, so ist dies bereits die periodische Lösung; sie hat die Periode c .
2. Sind dagegen die Bahnkoordinaten für $t = 0$ und $t = c$ voneinander verschieden, so läßt die Bahn sich durch Spiegelung an der x -Achse zu einer periodischen Lösung fortsetzen. Hierbei ist ihre primitive Periode oder ein ganzes Vielfaches von ihr $\neq 2c$.
3. Nach dem Spiegelungssatz sind bei jeder Bahn der in Abbildung 2 skizzierten Art alle Punkte, in denen die Bahn die x -Achse trifft, aber nicht senkrecht schneidet, Doppelpunkte dieser Bahn im (x, y) Koordinatensystem. Darum muß jede dieser Bahnen, wenn sie periodisch ist und ganz im Regularitätsbereich von Ω verbleibt, die x -Achse wenigstens noch einmal senkrecht schneiden.
4. Eine Bahn der eben genannten Art kann aber während einer primitiven Periode die x -Achse höchstens zweimal ^{*)} schneiden. Denn sind P_1 und P_2 zwei aufeinander folgende Punkte, in denen die Bahn die x -Achse senkrecht schneidet, so erhalten wir ja wie in 2. die ganze periodische Bahn durch Spiegelung.

Doch wie verhält es sich nun, wenn der Probekörper den Regularitätsbereich von Ω - etwa für $t = c$ - verläßt? Da c endlich bleiben soll, kommen als Singularitäten nur noch die Koordinaten der beiden Hauptkörper in Frage. Nach SUNDMANN [16] läßt sich dieses

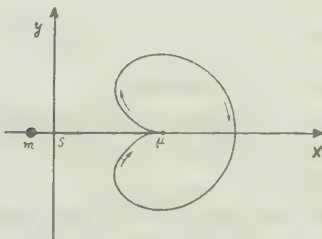


Abb. 4

Problem regularisieren, da wir beim Einsturz des Probekörpers in den einen Hauptkörper bzw. bei der Ejektion aus diesem die Anziehung des anderen Hauptkörpers vernachlässigen und uns somit auf die Theo-

*) senkrecht

rie des einfachen Zweierstoßes zurückziehen können. Allerdings läßt sich eine Regularisierung für den Fall von Ejektionsbahnen auch direkt für das Eingeschränkte Dreikörperproblem durchführen. Während eine von BURRAU [2] angegebene Lösung des Problems nur für die Ejektionsbahn selbst und nur für die unmittelbare Nachbarschaft des Ejektionsortes brauchbar ist, hat THIELE [19] ein Verfahren entwickelt, das eine numerische und von Singularitäten freie Lösung des Problems ermöglicht. Da für $t \neq c$ die Voraussetzung des Spiegelungssatzes erfüllt ist, erhalten wir eine periodische Lösung [Abb. 4] durch Spiegelung an der x -Achse mit der Periode $2c$, wenn der Probekörper für $t = 0$ bzw. $t = 2c$ die x -Achse senkrecht schneidet und für $t = c$ ein Einsturz bzw. eine Ejektion vorliegt.

Mit den obigen Betrachtungen läßt sich also folgendes Ergebnis formulieren: Liegt eine periodische Lösung des Eingeschränkten Dreikörperproblems vor, die an einer Stelle die x -Achse senkrecht schneidet, so schneidet sie entweder die x -Achse noch genau ein weiteres Mal senkrecht oder der Probekörper erleidet eine Ejektion bzw. einen Einsturz. Weiß man umgekehrt von einer Lösung des Eingeschränkten Dreikörperproblems, die zu irgend einem Zeitpunkt die x -Achse senkrecht schneidet, daß sie diese Achse ein weiteres Mal senkrecht schneidet oder eine Ejektion besitzt, so handelt es sich um eine periodische Bahn. Dieses Ergebnis soll unten noch verallgemeinert werden.

Hierzu geben wir vorweg noch einige Definitionen und Bemerkungen:

Definitionen: Die Bahn Γ eines Probekörpers $\mathcal{K}$ des Eingeschränkten Dreikörperproblems heißt für $t = t_0$

normal bezüglich einer Kurve $\mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ für $t = t_0$ auf Γ senkrecht schneidet;

HILLsch, wenn $\mathcal{K}$ für $t = t_0$ die Γ zugehörige HILLsche Grenzkurve H_0 erreicht;

eijektiv, wenn $\mathcal{K}$ für $t = t_0$ aus dem Massenmittelpunkt eines der beiden Hauptkörper herausgeschleudert wird;

injektiv, wenn K für $t = t_0$ in den Massenmittelpunkt eines der beiden Hauptkörper einstrahlt;
injektiv - ejektiv oder auch bijektiv, wenn für $t = t_0$ die Bahn Γ sowohl injektiv als auch ejektiv ist.

Bemerkungen:

1. Ist eine Bahn Γ des Eingeschränkten Dreikörperproblems für $t = t_0^*)$ normal, so ist wegen des JACOBI'schen Integrals die Geschwindigkeit des Probekörpers dort von Null verschieden und endlich.
2. Während einer Injektion bzw. Ejektion ist die Geschwindigkeit des Probekörpers $\dot{r}$ unendlich.
3. Ist Γ für $t = t_0$ HILL'sch, so erreicht bzw. verläßt der Probekörper K die der Bahn Γ zugehörige HILL'sche Grenzkurve H_0 senkrecht mit der Geschwindigkeit Null.

Definition: Eine Bahn Γ_2 soll dadurch gegeben sein, daß ihre Spur $\bar{\Gamma}_2$ aus der Spur $\bar{\Gamma}_1$ der Bahn Γ_1 durch Spiegelung von $\bar{\Gamma}_1$ an der Geraden $\mathcal{G}$ entsteht. Es heiße nun

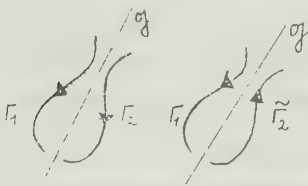


Abb. 5

1. Γ_2 symmetrisch zu Γ_1 bezüglich $\mathcal{G}$,
===== wenn der Richtungssinn dabei mitgespiegelt wird (Abb. 6);
2. Γ_2 antisymmetrisch zu Γ_1 bezüglich $\mathcal{G}$,
===== wenn der Richtungssinn dabei nicht mitgespiegelt wird (Abb. 7).

Definition:

Sei Γ eine Bahnkurve des Eingeschränkten Dreikörperproblems.

$\alpha_v = \alpha_v(\Gamma)$ bezeichnet den Fall, daß ein Zeitpunkt $t = t_v$ existiert, in dem der Probekörper K auf Γ die Abszisse des mitrotierenden Koordinatensystems x -Achse des rotierenden Koordinatensystems

*)

dinatensystems in $z = z_v$ entweder

1. normal oder aber

2. tangential trifft; in diesem Fall unterscheiden wir wiederum zwei Fälle:

2.1 Γ ist dort HILLsch

2.2 Γ ist dort bijektiv.

Wir nennen dann $\mathcal{Q}(\Gamma) = \left\{ \alpha_v / \alpha_v = z_v = z(t_v); -\infty < t_v < +\infty \right\} = \{\alpha\}$

die Zustandsmenge von Γ .

Trifft nun die Bahn Γ die Abszisse weder normal noch tangential, so nennen wir ihr Verhalten dort gemein.

Bemerkungen: Wie leicht zu ersehen ist, schließen sich wegen des JACOBI'schen Integrals die Fälle 1., 2.1 und 2.2 einander gegenseitig aus. Ebenso wenig ist es wegen der Gültigkeit des eben zitierten Satzes möglich, daß die gleiche Bahn in ein und demselben Punkt tangential (also HILLsch oder bijektiv) und zugleich gemein ist. Vorkommen kann also nur, daß eine Bahn in einem bestimmten Punkt sowohl normal als auch gemein ist; die Zustandsgröße ist hier natürlich geprägt durch den normalen Anteil der Bahn.

Es gilt nun folgendes leicht zu beweisendes

Lemma: Für die Periodizität einer Lösungsbahn Γ des Eingeschränkten Dreikörperproblems mit nicht leerer Zustandsmenge $\mathcal{Q}(\Gamma)$ ist notwendig und hinreichend, daß $\mathcal{Q}(\Gamma)$ aus genau zwei voneinander verschiedenen Elementen besteht.

Bemerkung: $\mathcal{Q}(\Gamma)$ kann aus höchstens zwei voneinander verschiedenen Elementen bestehen, da die Annahme von bereits drei voneinander verschiedenen Elementen zum Widerspruch zur Eindeutigkeit der Lösungen der Differentialgleichungen (1.20) führen würde.

Die Bedingung des Lemmas ist hinreichend.

Beweis: $\mathcal{Q}(\Gamma)$ bestehe aus den beiden Elementen z_1 und z_2 . Nach der Definition von $\mathcal{Q}(\Gamma)$ müssen z_1 und z_2 auf der Abszisse des

mitrotierenden Koordinatensystems und zugleich auf der Lösungsbahn Γ liegen. Sei nun Γ_1 die von z_1 nach z_2 führende Bahn. Damit ist aber auch die von z_2 nach z_1 führende, zu Γ_1 antisymmetrisch liegende Bahn Γ_2 Lösung der Differentialgleichung (I. 20), wobei natürlich Γ_1 und Γ_2 die gleiche JACOBI'sche Konstante haben. Da nun beim Übergang von Γ_1 über z_2 zu Γ_2 sich nach Definition von $\mathcal{O}_1(\Gamma)$ auch die Geschwindigkeitsrichtung stetig ändert (das Gleiche gilt natürlich auch beim Übergang von Γ_2 über z_1 zu Γ_1), löst die aus Γ_1 und Γ_2 zusammengesetzte Bahn $\tilde{\Gamma}$ die Differentialgleichung und ist demnach eine periodische Bahn.

Die Bedingung ist notwendig.

Nach Voraussetzung existiert für die periodische Bahn ein α_0 , von dem aus gesehen zur Zeit $t = t_0$ (wir können $t_0 = 0$ setzen, da es auf den Ursprung der Zeit nicht ankommt) in x_0 ein Zweig Γ_1 der Bahn Γ endet und gleichzeitig ein zweiter, bezüglich der Abszisse zu Γ_1 antisymmetrisch verlaufender Zweig Γ_2 beginnt. Nach Voraussetzung ist hier $x_0 = \alpha_0 \in \mathcal{O}_1(\Gamma)$, so daß Γ_1 mittels Γ_2 zu einer weiteren Lösung der Differentialgleichungen (I. 20) fortgesetzt werden kann. Für $\tau > 0$, τ wachsend verfolgen wir im Sinne des Spiegelungssatzes, Abb. 5 und Abb. 5' von $t = t_0 = 0$ ausgehend gleichzeitig zurück bis $t = -\tau$, Γ_2 dagegen von $t = 0$ bis $t = +\tau$, vergleichen dort das Verhalten beider Bahnkurven und suchen nach gemeinsamen Schnittpunkten der beiden Bahnen Γ_1 und Γ_2 .

Bezeichnet man mit $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}_1(-t)$ die Koordinaten von Γ_1 ,

$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_2(t)$ dagegen die von Γ_2 , so muß wegen der vorausgesetzten Periodizität von Γ für ein geeignetes $\tilde{\tau}$ $\mathfrak{z}_1(-\tilde{\tau}) = \mathfrak{z}_2(+\tilde{\tau}) = \tilde{z}$ gelten. Wir behaupten, daß dieser Schnittpunkt von Γ_1 und Γ_2 auf der

Abszisse liegen muß und betrachten hier Abb. 5

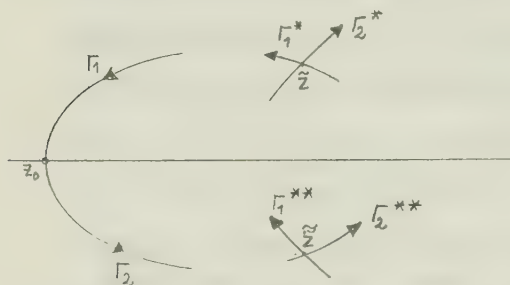


Abb. 5'

$\tilde{z} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ Annahme, die Behauptung sei falsch.

ObdA sei $\tilde{y} > 0$. Dann müßte aber wegen des Spiegelungssatzes zu Γ_1^* antisymmetrisches Γ_2^{**} und ebenso zu Γ_2^* ein dazu antisymmetrisches Γ_1^{**} existieren, die sich in der unteren Halbebene im

Punkt $\tilde{z} = (\tilde{x}, -\tilde{y})$ schneiden. Daraus würde aber folgen, daß sich Γ_1 in einem Punkt P_1 in Γ_1^* und Γ_1^{**} (bzw. spiegelbildlich zur Abszisse Γ_2 in Γ_2^* und Γ_2^{**}) aufspalten müßte, was im Widerspruch stünde zur Eindeutigkeit von Lösungen der Differentialgleichungen (I. 20). Damit muß also, wie behauptet, ein gemeinsamer Schnittpunkt der beiden Zweige auf der Abszisse liegen. Treffen Γ_1 und Γ_2 hier die x-Achse normal oder tangential, so ist die Behauptung bereits bewiesen. Andernfalls ist dieser Schnittpunkt gemein und wir müssen Γ_1 weiter zurück und gleichzeitig Γ_2 weiter vorwärts verfolgen. Es wird nun behauptet, Γ hat höchstens endlich viele gemeine Schnittpunkte. Hätte Γ nämlich unendlich viele gemeinsame Punkte mit der Abszisse (es könnten sowieso nur abzählbar viele sein, weil die Bahnkrümmung tangential zur Abszisse stets von Null verschieden ist), so könnte Γ sicher nicht periodisch sein. Es kann aber auch nur höchstens ein weiterer, nicht gemeiner Schnittpunkt von Γ mit der x-Achse vorkommen, da die Existenz eines weiteren wieder gegen die Eindeutigkeit von Lösungen dieser Differentialgleichungen (I. 20) verstoßen würde; womit dieses Lemma bewiesen ist.

Speziell für das Kopenhagenproblem erhalten wir außer dem obigen Spiegelungssatz wegen (II.1) und (II.2) noch einen Spiegelungssatz bezüglich der y -Achse und entsprechende Folgerungen:

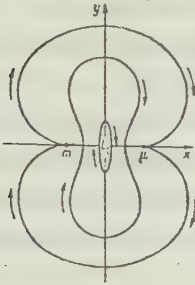


Abb. 5''

Weiß man z. B. von einer Lösung des Kopenhagenproblems, daß sie die y -Achse senkrecht in zwei voneinander verschiedenen Punkten (die natürlich nach dem allgemeinen Spiegelungssatz bezüglich des Koordinatenursprungs spiegelbildlich zueinander liegen müssen) schneidet, so handelt es sich um eine periodische Lösung. Oder weiß man

von einer Lösung des Kopenhagenproblems, daß sie in zwei voneinander verschiedenen Punkten, die auf ein und derselben Achse oder auf beiden Achsen liegen, diese Achse bzw. Achsen senkrecht schneidet, so handelt es sich um eine periodische Lösung, die sich durch Spiegelung vervollständigen läßt.

Schließlich gilt für alle periodischen Lösungen des Kopenhagenproblems, die die y -Achse einmal senkrecht schneiden, noch folgende Aussage: entweder schneiden sie die x -Achse in zwei bezüglich des Koordinatenursprungs spiegelbildlichen Punkten senkrecht oder aber sie erleiden in den Zentren der beiden Hauptkörper Ejektionen bzw. Einstürze. Oder sie trifft auf der Abszisse ihre HILLsche Grenzkurve senkrecht. Auf alle Fälle erhält man die volle periodische Bahn durch Spiegelung an der x -Achse.

III. Die CHARLIERSche Theorie.

§ 8. Die einfachsten periodischen Näherungslösungen.

Wir hatten im Paragraph 6 gesehen, daß für eine sehr große JACOBIsche Konstante c für unseren Probekörper nur Bewegungen folgender Art möglich sind:

1. Der Probekörper hält sich dauernd in einer unmittelbaren (kreisähnlichen) Umgebung um einen der beiden Hauptkörper als dessen Satellit auf.
2. Der Probekörper verbleibt stets außerhalb eines hinreichend großen "Kreises" um die beiden Hauptkörper als sogenannter "entfernter Begleiter eines engen Doppelsterns".

Ist nun im ersten Fall die vorgegebene Umgebung des einen Hauptkörpers mit der Masse m' hinreichend klein, so können wir nach den Ergebnissen der ersten beiden Paragraphen in erster Näherung die vom zweiten Hauptkörper (mit seiner Masse m'') auf den Probekörper einwirkende Anziehung vernachlässigen. Da weiter bei einer Untersuchung zugrunde liegenden raumfesten Koordinatensystem die Geschwindigkeit des Probekörpers nahezu überall wesentlich größer ist als die Geschwindigkeit von m' , läßt sich unser Problem in erster Näherung auf ein Einkörperproblem zurückführen. Als periodische Lösungen kommen somit nur Scharen sowohl recht- als auch rückläufiger Ellipsen in Frage, auf denen sich der Körper mit sehr kurzen Umlaufszeiten um den einen Brennpunkt in m' bewegen kann (wobei in (I.1) an Stelle von M nun μ bzw. $m = 1 - \mu$ zu nehmen ist). Damit aber von diesen Scharen nicht nur diskrete Vertreter auch im rotierenden (x, y) -Koordinatensystem periodisch sind (etwa wenn nach (I.21) deren mittlere Bewegung ein ganzes Vielfaches von 1 ist), wollen wir für spätere Betrachtungen noch alle nicht kreisförmigen Bahnellipsen aussondern. Damit erhalten wir schließlich im rotierenden (x, y) -Koordinatensystem in erster Näherung um jeden der beiden Hauptkörper jeweils eine Schar rechtläufiger als auch eine Schar rückläufiger Kreislösungen, wobei sich die Umlaufszeiten dieser periodischen Lösungen im (x, y) -Koordinatensystem kaum von den Umlaufszeiten in den Relativkoordinaten unterscheiden.

Für die Berechnung erster Näherungslösungen können wir im zweiten Fall annehmen, daß die Massen der beiden Hauptkörper in deren gemeinsamem Schwerpunkt S ruhen. (wobei $M = m + \mu = 1$ ist). Lassen wir bei diesem Einkörperproblem aus dem gleichen Grund wie oben als periodische Bahnen nur Kreislösungen um S zu, so erhalten wir im absoluten Koordinatensystem mit dem Ursprung in S folgende zwei periodische Lösungsscharen, deren Umlaufzeiten durch (I.1) mit $a = R$ und $M = 1$ festgelegt sind: eine Schar rechtläufiger Kreislösungen und eine Schar rückläufiger Kreislösungen um S . Da mit großem R nach (I.1) auch die Umlaufzeiten des Probekörpers sehr viel größer sind als die Umlaufzeit der beiden Hauptkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, bestehen beide Scharen aus Kreislösungen, die im rotierenden (x, y) -Koordinatensystem rückläufig sind.

Wir wenden uns nun der Möglichkeit von Lösungen in der Nähe der fünf LAGRANGESchen Librationszentren L_ν , ($\nu = 1, \dots, 5$) zu. Hierzu führen wir zunächst für jeden dieser Zentren folgende Koordinatentransformation durch

$$(III.1) \quad \begin{aligned} x &= x_{L_\nu} + X \\ y &= y_{L_\nu} + Y \end{aligned} \quad (\nu = 1, \dots, 5)$$

Weil die Potentialfunktion Ω in allen fünf Librationszentren reellanalytisch in beiden Variablen ist, gibt es zu jedem dieser L_ν eine gewisse Umgebung, in der sich Ω in die TAYLORSche Reihe

$$\begin{aligned} \Omega(x_{L_\nu} + X, y_{L_\nu} + Y) &= \Omega(x_{L_\nu}, y_{L_\nu}) + X \Omega_x + Y \Omega_y \\ &\quad + \frac{1}{2} (X^2 \Omega_{xx} + 2XY \Omega_{xy} + Y^2 \Omega_{yy}) + \dots, \end{aligned}$$

darstellen läßt, wobei natürlich als Argumente der hier auftretenden partiellen Ableitungen die Koordinaten (x_{L_ν}, y_{L_ν}) des jeweils betrachteten Librationszentrums zu nehmen sind. Da in diesen nach (II.4')

$$\Omega_x = \Omega_y = 0 \text{ ist, erhalten wir mit (III.1) aus (II.50)}$$

$$\begin{aligned} \ddot{X} - 2\dot{Y} &= X \Omega_{xx} + Y \Omega_{xy} + \sum_{p+q \geq 2} A_{pq} X^p Y^q \\ \ddot{Y} - 2\dot{X} &= X \Omega_{xy} + Y \Omega_{yy} + \sum_{p+q \geq 2} B_{pq} X^p Y^q \quad |X|, |Y| < r_Y^0 \end{aligned} \quad (\text{III. 2})$$

ein System, das trotz Kenntnis der Konstanten A_{pq}, B_{pq} allgemein ja nicht lösbar ist. Um dennoch über die charakteristische Eigenschaft von Lösungen etwas erfahren zu können, nimmt man an, der Probekörper befinde sich in einer so kleinen Umgebung um den jeweiligen Librationspunkt, daß in den Gleichungen (III. 2) alle Glieder zweiter und höherer Ordnung in den Variablen X und Y vernachlässigt werden können; man linearisiert also das Problem. Dadurch erhält man ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die (wenn wir statt X und Y nun wieder x und y nehmen) das partikuläre Integral

$$(\text{III. 3}) \quad x = A e^{zt}; \quad y = B e^{zt}$$

besitzen, wobei A, B, z geeignete, noch zu bestimmende Konstanten sind. Schreiben wir nämlich

$$\dot{x} = z A e^{zt}, \quad \dot{y} = z B e^{zt}, \quad \ddot{x} = z^2 A e^{zt}, \quad \ddot{y} = z^2 B e^{zt}$$

und setzen dies und (III. 3) in die linearisierte Gleichung (III. 2) ein, so erhalten wir sofort nach Division durch den stets von Null verschiedenen Faktor e^{zt} die beiden homogenen linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} A (z^2 - \Omega_{xx}) - B (2z + \Omega_{xy}) &= 0 \\ A (2z - \Omega_{xy}) + B (z^2 - \Omega_{yy}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III. 4})$$

Diese sind einmal erfüllt, wenn $A = B = 0$ ist, der Probekörper sich also stets in einem der fünf Librationszentren aufhält. Wir sprechen dann von den LAGRANGESchen Lösungen, die wir auch sofort aus (II. 50) und (II. 4') hätten finden können und stationäre Lösungen des Eingeschränkten Dreikörperproblems repräsentieren, wie schon 1772 von LAGRANGE [5] gezeigt wurde. Gehen wir nun zu unserem absoluten (ξ, η) -Koordinatensystem zurück, so haben wir darin für den Probekörper fünf periodische

Lösungen. Er kann demnach Kreisbahnen (und zwar mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die beiden Hauptkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt S bewegen) um S ausführen. Hierbei kann er zweimal ein gleichseitiges Dreieck mit den Koordinaten der beiden Hauptkörper bilden (die beiden LAGRANGESchen Dreieckslösungen) oder sich nur auf der rotierenden, durch die beiden Hauptkörper hindurchgehenden Geraden in den drei kollinearen LAGRANGESchen Librationszentren befinden; die drei in Frage kommenden Radien werden hierbei durch die Gleichungen (II. 26'), (II. 30) und (II. 35) mit (II. 25) festgelegt.

Sind dagegen A und B nicht beide gleich Null, so lassen sich die Gleichungen (III. 4) genau dann erfüllen, wenn für z die Determinante

$$(III. 5) \quad \begin{vmatrix} z^2 - \Omega_{xx} & - (2z + \Omega_{xy}) \\ 2z - \Omega_{xy} & z^2 - \Omega_{yy} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Eine partikuläre Lösung von (III. 3) besteht dann also unter der Voraussetzung, daß z der biquadratischen Gleichung

$$(III. 6) \quad z^4 - (\Omega_{xx} + \Omega_{yy} - 4) z^2 + \Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = 0$$

genügt.

Da sich die Librationsbewegungen um die LAGRANGESchen Dreieckspunkte L_4 und L_5 wesentlich unterscheiden von den Librationsbewegungen um die kollinearen Librationszentren, wollen wir ihre Theorie in den folgenden Paragraphen getrennt behandeln.

§ 9 Enge Bahnen um die LAGRANGESchen Dreieckspunkte.

Da in den beiden LAGRANGESchen Dreieckspunkten wegen (II. 11) und $0 < \mu < 1$

$$\Omega_{xx} + \Omega_{yy} - 4 = -1, \quad \Omega_{xx} \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) > 0$$

ist, erhält dort die charakteristische Gleichung (III. 6) die Gestalt

$$(III.7) \quad z^4 + z^2 + \frac{27}{4} \mu (1 - \mu) = 0,$$

und es ist somit

$$(III.8) \quad z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 27 \mu (1 - \mu)}.$$

Die Parabel

$$(III.9) \quad \mathcal{J}(\mu) = 1 - 27 \mu (1 - \mu)$$

ist offenbar streng konvex, nimmt für $\mu = 0; +1$ den Wert $+1$ an und besitzt für $\mu = \frac{1}{2}$ einen Scheitel mit der Ordinate $\mathcal{J}(\frac{1}{2}) = -\frac{23}{4}$.

Es gilt also

$$(III.10) \quad -\frac{23}{4} < \mathcal{J}(\mu) \leq +1 \quad \text{für} \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

Für die vier gesuchten Wurzeln (den Eigenwerten von (III.7)) sind also drei voneinander verschiedene Fälle gesondert zu betrachten:

1. $\mathcal{J}(\mu)$ ist negativ.

Damit sind die beiden Werte z^2 in (III.8) zueinander konjugiert komplex mit negativem Realteil. Für die vier Eigenwerte erhalten wir somit ein Paar zueinander konjugiert komplexer Eigenwerte (z_2, z_3) mit negativem Realteil und ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte (z_1, z_4) mit positivem Realteil und es liegen hierbei jeweils z_1 und z_3 und ebenso z_2 und z_4 spiegelbildlich bezüglich des Koordinatenursprungs. Ohne weiter auf die zu diesen Eigenwerten gehörenden unperiodischen vier Lösungsscharen weiter einzugehen, können wir sagen, es handelt sich hier um vier Scharen logarithmischer Spiralen im Ortsraum. Auf jeder Kurve der einen Schar nähert sich unser Probekörper mit negativem Windungssinn dem LAGRANGESchen Librationszentrum, ohne dieses jemals in endlicher Zeit zu erreichen; auf jeder Kurve der anderen Schar dagegen entfernt sich der Probekörper mit ebenfalls negativem Windungssinn vom Librationszentrum. Auf jeder Kurve der beiden verbleibenden Scharen nähert bzw. entfernt sich der Probekörper mit positivem Windungssinn.

2. $\mathcal{J}(\mu) = 0$.

Bei den hierfür in Frage kommenden beiden Wurzeln $\mu_1, \mu_2 = (1 - \mu_1)$ von (III.9) können wir unsere Betrachtung auf die zwischen 0 und $1/2$ gelegene beschränken. Für diese gilt offenbar

$$(III. 11) \quad \mu_0(1-\mu_0) = \frac{1}{27}; \quad \mu_0 = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}} \approx 0,03852 \approx \frac{1}{25,96}.$$

Wir erhalten damit aus (III. 8) zwei Doppelwurzeln von (III. 7) zu

$$(III. 12) \quad z_1 = z_2 = +\frac{i}{\sqrt{2}}; \quad z_3 = z_4 = -\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Wie wir später sehen werden, erhalten wir hieraus zwei Scharen periodischer Bahnen, nämlich coaxialer Ellipsen um das Librationszentrum, wobei die Bilder der Kurven der einen Schar mit denen der anderen Schar übereinstimmen. Die wegen der Vielfachheit der Wurzeln (III. 11) zur allgemeinen Lösung der linearisierten Differentialgleichung (III. 2) noch fehlenden zwei partikulären Integrale erhält man wie üblich aus den vermittelst (III. 11) gewonnenen Lösungen durch Polynomansatz; es handelt sich hier wegen der Doppeldeutigkeit der beiden Wurzeln jeweils um Polynome ersten Grades, weshalb die daraus entstehenden partikulären Lösungen nicht periodisch sein können.

3. $\Phi(\mu)$ ist positiv.

Damit sind beide Werte von (III. 8) reell. Wegen (III. 10) und (III. 11), gilt also

$$(III. 13) \quad 0 < \Phi(\mu) < 1 \quad \text{für} \quad 0 < 27\mu(1-\mu) = k < 1 \\ \Phi(0) = 0; \quad k = \mu = 0,$$

womit also die beiden Werte von (III. 8) :

$$(III. 8^1) \quad z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1-k} < 0 \quad \text{für} \quad 0 < k < 1$$

$$(III. 8^2) \quad z^2 = 0 \quad \text{oder} \quad = -1 \quad \text{für} \quad k = 0$$

sind. Es hat also (III. 7) für $k = \mu = 0$ die Wurzeln $\pm i$ und die Doppelwurzel 0, für $0 < k < 1$ nur die vier rein imaginären Wurzeln.

$$(III. 14) \quad z_1 = i \nu_1, \quad z_2 = -i \nu_1; \quad z_3 = i \nu_2; \quad z_4 = -i \nu_2,$$

wobei ν_1, ν_2 reelle positive Größen sind, die wegen (III. 8¹) von der individuellen Wahl von μ , ($0 < \mu < \mu_0$) abhängen und bereits so gewählt sein sollen, daß

$$(III. 15) \quad 0 < \nu_1 < \nu_2$$

ist.

Die allgemeine Lösung der linearisierten Differentialgleichungen (III. 2), die vier unabhängige Konstanten erfordert, lautet dann

$$(III. 16) \quad x = \sum_{n=1}^4 A_n e^{z_n t}, \quad y = \sum_{n=1}^4 B_n e^{z_n t}$$

wobei die A_n ($n=1,2,3,4$) vier willkürliche komplexe Konstanten sind und die B_n mit den A_n durch (III. 5) zusammenhängen; es ist also

$$(III. 17) \quad B_n = A_n \frac{z_n^2 - \Omega_{xx}}{2z_n + \Omega_{xy}} = A_n \frac{\Omega_{xy} - 2Z_n}{Z_n^2 - \Omega_{yy}}.$$

Mit (III. 14) läßt sich dann (III. 16) in der Form

$$(III. 18) \quad \begin{aligned} x &= a_1 \cos \nu_1 t + a_2 \sin \nu_1 t + a_3 \cos \nu_2 t + a_4 \sin \nu_2 t \\ y &= b_1 \cos \nu_1 t + b_2 \sin \nu_1 t + b_3 \cos \nu_2 t + b_4 \sin \nu_2 t \end{aligned}$$

schreiben, wobei die a_n willkürliche reelle Konstanten sind, nach deren Wahl auch die b_n mitbestimmt sind.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} a_1 &= A_1 + A_2; \quad a_2 = i(A_1 - A_2); \quad b_1 = B_1 + B_2; \quad b_2 = i(B_1 - B_2), \\ a_3 &= A_3 + A_4; \quad a_4 = i(A_3 - A_4); \quad b_3 = B_3 + B_4; \quad b_4 = i(B_3 - B_4) \end{aligned}$$

woraus nach (III. 17) sofort

$$(III. 19) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{2a_2 \nu_1 - a_1 \Omega_{xy}}{\nu_1^2 + \Omega_{yy}}; \quad b_2 = - \frac{2a_1 \nu_1 + a_2 \Omega_{xy}}{\nu_1^2 + \Omega_{yy}} \\ b_3 &= \frac{2a_4 \nu_2 - a_3 \Omega_{xy}}{\nu_2^2 + \Omega_{yy}}; \quad b_4 = - \frac{2a_3 \nu_2 + a_4 \Omega_{xy}}{\nu_2^2 + \Omega_{yy}} \end{aligned}$$

oder

$$(III. 20) \quad \begin{aligned} a_1 &= - \frac{2b_2 \nu_1 + b_1 \Omega_{xy}}{\nu_1^2 + \Omega_{xx}}; \quad a_2 = \frac{2b_1 \nu_1 - b_2 \Omega_{xy}}{\nu_1^2 + \Omega_{xx}} \\ a_3 &= - \frac{2b_4 \nu_2 + b_3 \Omega_{xy}}{\nu_2^2 + \Omega_{xx}}; \quad a_4 = \frac{2b_3 \nu_2 - b_4 \Omega_{xy}}{\nu_2^2 + \Omega_{xx}} \end{aligned}$$

folgt. Gehen wir mit den vier Beziehungen (III.20) in (III.18) ein, setzen für die vier willkürlichen Konstanten b_ν , ($\nu = 1, 2, 3, 4$),

$$b_2 = -c_1 (\Omega_{xx} + \nu_1^2), \quad b_1 = -c_2 (\Omega_{xx} + \nu_1^2)$$

$b_4 = -c_3 (\Omega_{xx} + \nu_2^2)$, $b_3 = -c_4 (\Omega_{xx} + \nu_2^2)$, und, (indem wir uns von nun an auf das Librationszentrum L_4 beschränken)

$$(III.21) \quad \Omega_{xy} = \frac{\sqrt{27}}{4} (1 - 2\mu) = K,$$

so erhalten wir vermittels (II.11) schließlich als allgemeine Lösung der linearisierten Differentialgleichungen (III.2)

(III.22)

$$x = c_1 (K \sin \nu_1 t + 2 \nu_1 \cos \nu_1 t) + c_2 (K \cos \nu_1 t - 2 \nu_1 \sin \nu_1 t) + \\ + c_3 (K \sin \nu_2 t + 2 \nu_2 \cos \nu_2 t) + c_4 (K \cos \nu_2 t - 2 \nu_2 \sin \nu_2 t),$$

$$y = -c_1 \left(\nu_1^2 + \frac{3}{4} \right) \sin \nu_1 t - c_2 \left(\nu_1^2 + \frac{3}{4} \right) \cos \nu_1 t - \\ - c_3 \left(\nu_2^2 + \frac{3}{4} \right) \sin \nu_2 t - c_4 \left(\nu_2^2 + \frac{3}{4} \right) \cos \nu_2 t,$$

mit den vier neuen willkürlichen Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 .

Die durch das allgemeine Integral (III.22) gegebene Bewegung ist offenbar rein oszillatorisch. Sie setzt sich additiv aus zwei periodischen Bewegungen zusammen mit den zwei (nach (III.16) von einander verschiedenen) Perioden

$$(III.23) \quad P_1 = \frac{2\pi}{\nu_1}; \quad P_2 = \frac{2\pi}{\nu_2},$$

und es handelt sich hierbei offenbar um zwei reine Sinusschwingungen, deren Amplituden durch geeignete Festlegung der Konstanten c_σ ($\sigma = 1, 2$ bzw. $\sigma = 3, 4$) bzw. der Anfangsbedingungen so klein gewählt werden können, daß die auf das Librationszentrum bezogenen Koordinaten x und y für alle Zeiten klein genug gegen die Einheit (d.h. den konstanten Abstand der beiden Hauptkörper) bleiben. Hiermit sind die dieser

Fassung des Problems zugrunde liegenden Voraussetzungen erfüllt, nach denen sich der Probekörper in einer so kleinen Umgebung aufhalten soll, daß Glieder von mindestens zweiter Ordnung in x und y in (III.2) vernachlässigt werden können. Weil aber kleine Stöße und Störungen nur die Anfangsbedingungen etwas ändern und somit nur kleine Änderungen der Amplituden und Phasen der beiden Elementarschwingungen hervorrufen, die Periodenlängen dagegen wegen (III.8') und (III.14) unverändert bleiben, sind die Bewegungen des linearisierten Problems stabil. Insbesondere ist also die LAGRANGESche triviale Lösung, d.h. die Gleichgewichtslösung im LAGRANGESchen Librationszentrum L_4 (bzw. L_5) in diesem linearen Fall stabil. Aus diesem Grunde ist es naheliegend die Gleichgewichtslösungen in den beiden LAGRANGESchen Dreieckspunkten der nicht linearisierten Differentialgleichungen (III.2) als stabil anzusehen, was in der Vergangenheit auch getan wurde. Erst LJAPUNOWS Arbeit [7] hat gezeigt, daß diese Schlußweise nicht gerechtfertigt ist, da es sich hier um einen "kritischen" Lösungstyp handelt, bei dem definitionsgemäß beim linearisierten Differentialgleichungssystem kein Eigenwert einen positiven Realteil besitzt, aber wenigstens ein Realteil verschwindet und somit für Stabilität oder Instabilität die nichtlinearen Glieder verantwortlich sind [9]. Zu bemerken ist hierbei, daß es recht kompliziert ist, sich Methoden zu verschaffen, das Stabilitätsproblem in "kritischen" Fällen zu lösen. Es gibt bisher noch kein allgemeines Verfahren zu ihrer Lösung, und die Schwierigkeiten wachsen mit der Anzahl der "kritischen" Wurzeln. Basierend auf einem Theorem von ARNOLD [1] konnte deshalb erst 1962 LEONTOVIC [6] für den kritischen Fall der Gleichgewichtslösungen in den LAGRANGESchen Dreieckspunkten L_4 und L_5 (nach (III.14) haben wir es hier mit zwei Paaren rein imaginärer konjugiert komplexer Eigenwerte zu tun) zeigen, daß diese stationären Lösungen auch im nicht linearisierten Fall stabil sind, es sich also in L_4 und L_5 um stabile Gleichgewichtslagen der (unverkürzten) Differentialgleichungen (III.2) handelt. In diesem Zusammenhang weist SZEBEHELY [17] und [18] übrigens darauf hin, daß WINTNER 1941 gezeigt hat, daß diese Gleichgewichtslösungen in den beiden LAGRANGESchen Dreieckslibrationszentren der Existenz der CORIOLIS-

Kräfte $(-2\ddot{y}, +2\ddot{x})$ in den Bewegungsgleichungen (III.2) zuzuschreiben sind.

Betrachten wir unser Sonnensystem, so ist für alle Planeten μ sehr klein und selbst für Jupiter ist das Verhältnis der Planetenmasse zur Sonnenmasse nur

$$(III.24) \quad \frac{\mu}{1-\mu} \approx \frac{1}{1047,35} \text{ d.h. } \mu \approx \frac{1}{1048,35}, \quad k = 0,02573 \dots$$

Für alle Planeten ist somit die Bedingung $0 < k < 1$ erfüllt, womit sich mit (III.8') und (III.14) die Größen v_1, v_2 in rasch konvergierende Potenzreihen nach k entwickeln lassen:

(III.25)

$$v_1^2 = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1-k}) = \frac{1}{4} k (1 + \frac{1}{4}k + \frac{1}{8}k^2 + \frac{5}{64}k^3 + \dots),$$

$$v_2^2 = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1-k}) = 1 - v_1^2$$

und daraus

(III.26)

$$v_1 = \frac{1}{2} \sqrt{k (1 + \frac{1}{8}k + \frac{7}{128}k^2 + \frac{33}{1024}k^3 + \dots)},$$

$$v_2 = 1 - \{ \frac{1}{8}k + \frac{5}{128}k^2 + \frac{21}{1024}k^3 + \dots \}.$$

Daraus und mit (III.24) erhalten wir speziell für den Planeten Jupiter

$$v_1 = 0,080464 \dots; \quad v_2 = 0,99676 \dots,$$

womit dann die Umlaufsperioden durch (III.23) in der Zeiteinheit gegeben sind, in der Sonne und Jupiter in raumfesten Koordinaten jeweils eine volle Kreisbahn um ihren gemeinsamen Schwerpunkt ausführen. Ausgedrückt in der siderischen Umlaufszeit des Jupiters $T = 11^a 862$ erhalten wir die beiden Elementarperioden der Librationsbewegungen von Planetoiden in den Librationszentren L_4 und L_5 zu

$$P_1 = 147^a 42 \dots; \quad P_2 = 11^a 900 \dots = T + 13^d.$$

Wie aus (III. 8) bzw. (III. 25) zu ersehen ist, sind die beiden Elementarperioden im allgemeinen inkommensurabel, so daß die Librationsbahnen keine geschlossenen Kurven sind, wenn nicht eine der beiden Elementarschwingungen ganz ausfällt. Kommensurabilität tritt nach (III. 25) nur ein, wenn

$$\frac{\sqrt{1}^2}{\sqrt{2}^2} = \frac{1 - \sqrt{1-k}}{1 + \sqrt{1-k}} = x^2$$

das Quadrat einer rationalen Zahl ist. Aus denselben Gründen sind die beiden Elementarschwingungen einzeln in einem raumfesten Koordinatensystem im allgemeinen nicht periodisch. In unserem rotierenden Koordinatensystem dagegen hat jede der beiden sich überlagernden periodischen Bewegungen die Form einer Ellipse mit dem Librationszentrum als Mittelpunkt. Setzen wir nämlich die Konstanten a_3, a_4 in (III. 18) und somit wegen (III. 19) auch b_3, b_4 gleich Null, so ist der Probekörper der rein harmonischen Bewegung

$$\begin{aligned} x &= a_1 \cos \sqrt{1}t + a_2 \sin \sqrt{1}t \\ y &= b_1 \cos \sqrt{1}t + b_2 \sin \sqrt{1}t \end{aligned} \quad \text{(III. 27)}$$

mit der Periode P_1 aus (III. 23) unterworfen, wobei die b_1, b_2 durch (III. 19) aus den a_1, a_2 zu erhalten sind. Setzen wir dagegen a_1, a_2 und somit auch b_1, b_2 Null, so erhalten wir entsprechende Gleichungen für die Elementarbewegung mit der Periode P_2 . Darum reicht es also aus, die Gleichungen (III. 27) zu diskutieren. Wir erhalten aus ihnen sofort

$$\cos \sqrt{1}t = \frac{xb_1 - ya_2}{a_1b_2 - b_1a_2}; \quad \sin \sqrt{1}t = \frac{ya_1 - xb_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

und daraus

$$\text{(III. 28)} \quad x^2(b_1^2 + b_2^2) - 2xy(a_1b_1 + a_2b_2) + y^2(a_1^2 + a_2^2) = (a_1b_2 - b_1a_2)^2$$

als Gleichung der Bahnkurve; unser Probekörper bewegt sich also auf einer Ellipse. Um herauszufinden, in welcher Richtung der Probekörper diese Ellipse durchläuft, genügt es, die Bahnkrümmung einer der Elementar-

tarschwingungen genauer zu untersuchen. Seien in (III.22) etwa $c_1 \neq 0$; $c_2 = c_3 = c_4 = 0$, so lautet die Bahnkrümmung bekanntlich zu jedem Zeitpunkt t

$$K_r := \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} = \frac{-2c_1^2 \nu_1^4 (\nu_1^2 + \frac{3}{4})}{\left\{ \nu_1^2 c_1^2 [(K \cos \nu_1 t - 2 \nu_1 \sin \nu_1 t)^2 + (\nu_1^2 + \frac{3}{4})^2 \cos^2 \nu_1 t] \right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Wie aus (III.21) und (III.8') bzw. (III.8'') zu ersehen ist, bleibt der Nenner dieses Ausdrucks für $0 < k < 1$ stets positiv, die Krümmung ist also dauernd negativ, der Probekörper bewegt sich auf der Librationsellipse demnach im Uhrzeigersinn um das LAGRANGESche Librationszentrum L_4 . Nach dem Spiegelungssatz des Paragraphen 7 folgt daraus weiter, daß der Probekörper auf einer in Frage kommenden Librationsellipse um das LAGRANGESche Librationszentrum L_5 diese Gleichgewichtslage ebenfalls nur im mathematisch negativen Sinn umlaufen kann.

Wollen wir nun den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Ellipsengleichung (III.28) und der Periode der Elementarschwingung aufdecken, so müssen wir (III.28) noch etwas umformen. Multiplizieren wir hierzu in den ersten beiden Gleichungen von (III.19) die Nenner heraus, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} (III.29) \quad b_1 (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) &= 2a_2 \nu_1 - a_1 \Omega_{xy} \\ b_2 (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) &= 2a_1 \nu_1 - a_2 \Omega_{xy} . \end{aligned}$$

Wenn wir hier nun die erste der beiden Gleichungen mit a_1 , die zweite dagegen mit a_2 multiplizieren, so erhalten wir nach Addition

$$(III.30) \quad (a_1 b_1 + a_2 b_2) (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) = - (a_1^2 + a_2^2) \Omega_{xy} .$$

Eine Multiplikation der ersten Gleichung von (III.29) mit $-a_2$, der zweiten mit a_1 liefert dagegen nach Addition

$$(III.31) \quad (a_1 b_2 - a_2 b_1) (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) = - 2 \nu_1 (a_1^2 + a_2^2) .$$

Multiplizieren wir nun beide Gleichungen (III.29) mit sich selbst, so liefert eine anschließende Addition sofort

$$(III. 32) \quad (b_1^2 + b_2^2) (\nu_1^2 + \Omega_{yy})^2 = (a_1^2 + a_2^2) (4\nu_1^2 + \Omega_{xy}^2),$$

ein Ergebnis, das wir folgendermaßen noch etwas umformen wollen:
wie leicht zu ersehen ist, erhalten wir aus (III. 17) vermittels (III. 14)
sofort

$$(III. 33) \quad (\nu_1^2 + \Omega_{xx}) (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) = 4\nu_1^2 + \Omega_{xy}^2$$

und damit aus (III. 32) sofort

$$(III. 34) \quad (b_1^2 + b_2^2) (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) = (a_1^2 + a_2^2) (\nu_1^2 + \Omega_{xx})$$

oder also

$$(III. 35) \quad \frac{\nu_1^2 + \Omega_{yy}}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{\nu_1^2 + \Omega_{xx}}{b_1^2 + b_2^2}.$$

Eine Multiplikation von (III. 28) mit (III. 35) ergibt mit Hilfe der Beziehungen (III. 30), (III. 31) unter abermaliger Benutzung von (III. 35) sofort

$$(III. 36) \quad (\nu_1^2 + \Omega_{xx}) x^2 + 2xy \Omega_{xy} + (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) y^2 = R^2,$$

$$(III. 37) \quad R^2 = \frac{4\nu_1^2}{\nu_1^2 + \Omega_{xx}} (b_1^2 + b_2^2) = \frac{4\nu_1^2}{\nu_1^2 + \Omega_{yy}} (a_1^2 + a_2^2),$$

als neue Gleichung einer Ellipse mit dem Mittelpunkt im Librationszentrum L_4 . Bringen wir diese nun auf Hauptachsen, indem wir das

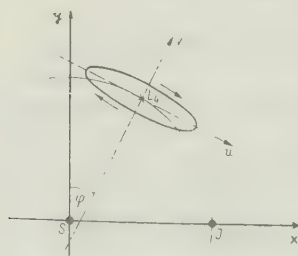


Abb. 6

(x, y) -Koordinatensystem durch

Drehung um einen Winkel φ

in ein (u, v) -System überführen
vermittels der beiden Trans-

formationsgleichungen

$$x = u \cos \varphi + v \sin \varphi ; \quad y = -u \sin \varphi + v \cos \varphi ;$$

so erhalten wir an Stelle von (III, 36) sofort

$$\begin{aligned} & u^2 [(\nu_1^2 + \Omega_{xx}) \cos^2 \varphi - \Omega_{xy} \sin 2\varphi + (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) \sin^2 \varphi] + \\ & + u v [(\nu_1^2 + \Omega_{xx}) \sin 2\varphi + 2 \Omega_{xy} \cos 2\varphi - (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) \sin 2\varphi] + \\ & + v^2 [(\nu_1^2 + \Omega_{xx}) \sin^2 \varphi + \Omega_{xy} \sin 2\varphi + (\nu_1^2 + \Omega_{yy}) \cos^2 \varphi] = \\ & = R^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichung nimmt die Normalform

$$\frac{u^2}{U^2} + \frac{v^2}{V^2} = 1$$

an, wenn

$$(III, 38) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \Omega_{xy}}{\Omega_{yy} - \Omega_{xx}} = \sqrt{3} (1 - 2\mu)$$

ist. Bestimmen wir aus dieser Gleichung den Winkel φ , so erhalten wir mit diesem φ die Hauptachsen U und V der Ellipse aus

$$\begin{aligned} (III, 39) \quad \frac{R^2}{U^2} &= \Omega_{xx} \cos^2 \varphi - \Omega_{xy} \sin 2\varphi + \Omega_{yy} \sin^2 \varphi + \nu_1^2, \\ \frac{R^2}{V^2} &= \Omega_{xx} \sin^2 \varphi + \Omega_{xy} \sin 2\varphi + \Omega_{yy} \cos^2 \varphi + \nu_1^2, \end{aligned}$$

wobei R durch (III, 37) gegeben ist. Demnach bilden also sämtliche partikulären Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems (III, 2) mit der Periode P_1 eine Schar konzentrischer, koaxialer ähnlicher Ellipsen, deren Parameter nach (III, 37) durch

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{gegeben ist.}$$

Zu einem entsprechenden Ergebnis kommen wir für die Gesamtheit der Lösungen mit der Periode P_2 . Wollen wir die zu dieser Periode P_2 gehörenden beiden Hauptachsen $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ und $\tilde{R}$ bestimmen, so haben wir in den Gleichungen (III. 37) und (III. 39) nur statt V_1 nun V_2 zu setzen. Da wegen (III. 38) der Winkel φ allein von μ abhängt, nicht jedoch von den beiden vermittle (III. 25), (III. 13) und (III. 23) mit μ verknüpften Perioden P_1 und P_2 , stimmen die Richtungen der Hauptachsen der coaxialen Librationsellipsen mit der Periode P_1 mit den Richtungen der Hauptachsen der P_2 -periodischen coaxialen Librationsellipsen überein. Beide Scharen konzentrischer und coaxialer ähnlicher Ellipsen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt in L_4 können sich demnach nur noch durch ihr Achsenverhältnis unterscheiden. Zur Bestimmung dieses Achsenverhältnisses setzen wir in (III. 39)

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} ; \quad \cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

und erhalten damit für $V = V_1$ bzw. $= V_2$

$$\frac{2R^2}{U^2} = \Omega_{xx} + \Omega_{yy} - (\Omega_{yy} - \Omega_{xx}) \cos 2\varphi - \Omega_{xy} \sin 2\varphi + 2V^2$$

$$\frac{2R^2}{V^2} = \Omega_{xx} + \Omega_{yy} + (\Omega_{yy} - \Omega_{xx}) \cos 2\varphi + \Omega_{xy} \sin 2\varphi + 2V^2$$

und daraus nach Elimination von Ω_{xy} durch (III. 38)

$$\frac{2R^2}{U^2} \cos 2\varphi = (\Omega_{xx} + \Omega_{yy} + 2V^2) - (\Omega_{yy} - \Omega_{xx}),$$

(III. 40)

$$\frac{2R^2}{V^2} \cos 2\varphi = (\Omega_{xx} + \Omega_{yy} + 2V^2) + (\Omega_{yy} - \Omega_{xx}).$$

Weil nach (II. 11) in den LAGRANGESchen Dreieckspunkten

$$\Omega_{xx} = 3/4, \quad \Omega_{yy} = 9/4 \quad \text{ist, erhalten wir obige beiden Gleichungen}$$

gen sofort zu

$$\frac{R^2}{U} = v^2 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sec 2\varphi\right)$$

$$\frac{R^2}{V^2} = v^2 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sec 2\varphi\right)$$

und daraus für das gesuchte Achsenverhältnis γ die Beziehung

$$(III. 41) \quad \gamma^2 = \frac{V^2}{U^2} = \frac{v^2 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sec 2\varphi\right)}{v^2 + \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \sec 2\varphi\right)},$$

die das Achsenverhältnis V/U der beiden Ellipsenscharen liefert, wenn wir für v nun v_1 bzw. v_2 setzen. Da wir aus (III. 38) sofort

$$\sec^2 2\varphi = 1 + \tan^2 2\varphi = 4(1 - 3\mu + 3\mu^2)$$

und daraus und (III. 13)

$$\sec 2\varphi = 2\sqrt{1 - 3\mu(1 - \mu)} = 2\sqrt{1 - \frac{k}{9}}$$

erhalten, ergeben sich die beiden gesuchten Achsenverhältnisse sofort zu

$$(III. 42) \quad \gamma_1^2 = \frac{1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{k}{9}}}{1 - \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{k}{9}}}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} - \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{k}{9}}}{1 + \frac{1}{4}\sqrt{1 - k} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - \frac{k}{9}}}$$

oder, in Potenzreihen nach k entwickelt, schließlich

$$\gamma_1 = \frac{1}{3} \sqrt{k} \left(1 + \frac{5}{72}k + \dots\right), \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{24}k - \frac{11}{3456}k^2 - \dots\right).$$

Somit ist also wegen (III. 13) bis auf Größen der Ordnung μ

$$\gamma_1 \approx \sqrt{3\mu}, \quad \gamma_2 \approx \frac{1}{2}.$$

So erhalten wir nach (III.24) für den Jupiter unseres Planetensystems das Achsenverhältnis der Librationsellipsen der ersten Schar zu

$$\gamma_1 \approx 1/18,6.$$

Aus (III.38) erhalten wir für φ wegen (III.11):

$$0 < \mu < \mu_0 \approx 0,0385$$

sofort noch folgende Ungleichung

$$(III.43) \quad 30^\circ > \varphi > \varphi_0 \approx 28^\circ 59'.$$

Der Winkel, um den wir das (x,y) -System im Uhrzeigersinn zu drehen haben, damit die große Achse der Bahnellipsen beider Scharen mit der u -Richtung zusammenfällt, ist somit nur wenig von 30° verschieden, wie in Abb. 6 angedeutet ist.

Um das Librationszentrum L_4 existieren also für $0 < k < 1$ zwei Scharen periodischer Lösungen, wobei jede dieser Scharen konzentrischer, koaxialer und ähnlicher Ellipsen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt in L_4 die Ebene schlicht überdeckt. Damit geht durch jeden von L_4 verschiedenen Punkt einer infinitesimalen Umgebung dieses Librationszentrums genau eine Ellipse der einen als auch genau eine Ellipse der anderen Schar. Die Ellipsen der zu ν_1 in (III.15) bzw. zu γ_1 in (III.42) gehörenden Schar bezeichnet man gewöhnlich als "periodische Bahnen der Familie d CHARLIERScher Klasse" und entsprechend die ν_2 bzw.

γ_2 zugeordneten Ellipsen als "periodische Bahnen der Familie e CHARLIERScher Klasse". Die Richtung der kleineren Achsen (wie oben gezeigt, fallen die Richtungen der beiden Hauptachsen beider Familien ja zusammen) führt vom Librationszentrum aus fast genau zu unserer "Sonne" (Abb. 6). Sie bildet mit der Richtung "Sonne"-Jupiter den Winkel $90^\circ - \varphi$, der wegen (III.43) nur wenig größer als 60° ist. Setzen wir für die beiden Gleichungen in (III.42)

$$(III.44) \quad \gamma_1^2 := F_1(k), \quad \gamma_2^2 := F_2(k); \quad 0 \leq k \leq 1,$$

womit dann

$$(III.45) \quad F_1(0) = 0, \quad F_1'(k) > 0 \quad \text{für } 0 \leq k < 1$$

$$F_2(0) = +\frac{1}{4}, \quad F_2'(k) < 0 \quad \text{für } 0 \leq k < 1$$

$$F_1(1) = F_2(1) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ist, so folgt daraus sofort, daß

$$(III.46) \quad 0 \leq \gamma_1 < \gamma_2 \quad \text{für } 0 \leq k < 1$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{für } k = 1$$

ist, die Ellipsen der Familie d im Gegensatz zu den Ellipsen der Familie e also langgestreckt sind. Wie wir oben am Beispiel des Systems Sonne-Jupiter sahen, ist hier bei der Familie d die große Achse fast 19 mal größer als die kleine, während das Achsenverhältnis γ_2 der Familie e nur geringfügig kleiner als 1/2 ist.

Aus den ersten Gleichungen (III.42), (III.44) und (III.45) ist mittels der Definitionsgleichung aus (III.13) zu ersehen, daß die Exzentrizität der Bahnellipsen der Familie d um so größer ist, je kleiner das Massenverhältnis zwischen "Sonne" und "Jupiter" ist. Das größte Achsenverhältnis wird nach (III.45) für $k = 1$ erreicht, also wenn die Planetenmasse den größten zulässigen Wert hat (Fall 2: $\Phi(\mu) = 0$); wir haben dann wegen (III.12) und (III.14) und der zweiten Gleichung von (III.46)

$$(III.47) \quad \nu_1 = \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414; \quad k = 1.$$

Nach (III.45) tritt dagegen das kleinste Achsenverhältnis $\gamma_1 = 0$ ein, wenn $k = \mu = 0$ ist, die Masse des "Jupiters" also gegen die Masse der "Sonne" vernachlässigt werden darf. In diesem Fall artet die Ellipsenschar der Familie d in eine kleine gerade Strecke aus, die wegen (III.33) mit $k = \mu = 0$ auf der Verbindungsgeraden zwischen L_4 und der "Sonne" senkrecht steht. Da weiter wegen (III.26) $\nu_1 = 0$ ist, kann sich der Probekörper auf dieser kleinen geraden Strecke nur "unendlich langsam" bewegen, er ruht mit anderen Worten also in L_4 .

oder in irgend einem anderen (dem "Jupiter" nicht zu nahe liegenden) Punkt des Einheitskreises um die "Sonne" und führt somit im raumfesten Koordinatensystem eine ungestörte Kreisbewegung um die "Sonne" aus. Lassen wir k von 0 bis 1 wachsen, so nehmen ν_1 und γ_1 nach (III. 25) und (III. 45) streng monoton bis zu den in (III. 47) gegebenen Werten zu.

Wie aus (III. 46) zu ersehen, ist das Achsenverhältnis der Ellipsen der Familie e stets größer als das der Familie d . Ebenso verhält es sich nach (III. 25) mit ν_2 und ν_1 . Im Grenzfall $\mu = k = 0$ wird $\gamma_2 = \frac{1}{2}$ und nach (III. 26) $\nu_2 = 1$. Die Umlaufszeit dieser Librationsbahnen fällt dann also mit der Umlaufszeit T der beiden Hauptkörper "Sonne" und "Jupiter" für deren Bewegung in raumfesten Koordinaten zusammen. Ist μ und somit auch k klein, so ist wegen (III. 26) und (III. 23) die Periode P_2 nur wenig größer als T . Wegen (III. 25) und (III. 45) nehmen ν_2 bzw. γ_2 streng monoton von 1 bzw. $\frac{1}{2}$ zu den in (III. 47) stehenden Werten ab, wenn wir k von 0 bis 1 wachsen lassen. Für den Extremfall $k = 1$, in dem beide Familien zusammenfallen und der bereits zu Anfang dieses Paragraphen behandelt wurde, gilt für die Periode nach (III. 23) und (III. 47) bzw. (III. 12), (III. 14) also $P_1 = P_2 = \sqrt{2} T$.

§ 10 ----- Enge Bahnen um die kollinearen Librationszentren. -----

Wie wir in Paragraph 4 bewiesen haben, besitzt unsere Potentialfunktion Ω Sattelpunkte in den drei kollinearen Librationszentren. Definieren wir in diesen

$$(III. 48) \quad \frac{m}{r^3} + \frac{\mu}{g^3} := 2 D, \quad (m + \mu = 1),$$

wobei mit r bzw. g die Abstände des jeweiligen Librationszentrums von den Koordinaten der beiden Hauptkörper "Sonne" bzw. "Jupiter" bezeichnet werden soll, so ergibt sich damit, (II. 14) und (II. 17) für $0 < \mu < \frac{1}{2}$ sofort

$$\begin{aligned}
 \text{(III. 49)} \quad \Omega_{xx} &= 1 + 4 D > 0 \\
 \Omega_{xy} &= 0 \\
 \Omega_{yy} &= 1 - 2 D < 0
 \end{aligned}$$

in allen drei kollinearen Librationszentren L_1 , L_2 und L_3 . Mit diesen Werten führt das partikuläre Integral (III. 3) des linearisierten Differentialgleichungssystems (III. 2), wenn dort die beiden Konstanten A und B nicht beide gleichzeitig verschwinden sollen, auf die charakteristische Gleichung (III. 6) in der Form

$$\text{(III. 50)} \quad z^4 - 2 [D - 1] z^2 + [1 + 2 D - 8 D^2] = 0$$

woraus sofort

$$\text{(III. 51)} \quad z^2 = D - 1 \pm \sqrt{9 D^2 - 4 D}$$

folgt.

Betrachten wir den Grenzfall, daß μ verschwindet, so erhalten wir offenbar aus (III. 48) wegen (II. 25), (II. 28), (II. 30), (II. 35)

$$\text{(III. 48')} \quad 2 D \rightarrow 4 \quad \text{in } L_1, L_2; \quad 2 D \rightarrow 1 \quad \text{in } L_3; \quad (\mu \rightarrow 0)$$

und damit also für $\mu \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \text{(III. 49')} \quad \Omega_{xx} &\rightarrow 9, & \Omega_{yy} &\rightarrow -3, & \Omega_{xy} &= 0 \quad \text{in } L_1, L_2; \\
 \Omega_{xx} &\rightarrow 3, & \Omega_{yy} &\rightarrow 0 = \Omega_{xy} & & \text{in } L_3.
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich weiter

$$\text{(III. 51')} \quad z^2 = 1 \pm 2\sqrt{7} \quad \text{für } L_1, L_2; \quad z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \quad \text{für } L_3.$$

Setzen wir nun statt (III. 51)

$$\begin{aligned}
 \text{(III. 52)} \quad F_1(D) &= D - 1 - \sqrt{9D^2 - 4D} \\
 F_2(D) &= D - 1 + \sqrt{9D^2 - 4D},
 \end{aligned}$$

wobei offenbar

$$\text{(III. 53)} \quad F_1\left(\frac{1}{2}\right) = -1; \quad F_2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

ist. Nun sind aber $F_1(D)$, $F_2(D)$ für $D \geq \frac{1}{2}$ sicher beliebig oft differen-

zierbar und es ist

$$(III.54) \quad F_1'(\frac{1}{2}) = -4; \quad F_1''(D) < 0 \quad \text{für} \quad D \geq \frac{1}{2}$$

$$F_2'(\frac{1}{2}) = +6; \quad F_2''(D) > 0 \quad \text{für} \quad D \geq \frac{1}{2}$$

Da nach (III.49) für $0 < \mu < 1: D > \frac{1}{2}$ ist, ist für alle diese Werte von μ nach (III.53) und (III.54)

$$F_1(D) < 0 \quad (0 < \mu < 1)$$

$$F_2(D) > 0 \quad (0 < \mu < 1)$$

Damit aber haben die vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung (III.50) die Gestalt

$$(III.55) \quad z_1 = i \mathcal{V}_1, \quad z_2 = -i \mathcal{V}_1, \quad z_3 = \mathcal{V}_2, \quad z_4 = -\mathcal{V}_2,$$

wenn $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ zwei positive Konstanten sind. Das allgemeine Integral des linearisierten Differentialgleichungssystems (III.2) ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{i \mathcal{V}_1 t} + A_2 e^{-i \mathcal{V}_1 t} + A_3 e^{\mathcal{V}_2 t} + A_4 e^{-\mathcal{V}_2 t} \\ y &= B_1 e^{i \mathcal{V}_1 t} + B_2 e^{-i \mathcal{V}_1 t} + B_3 e^{\mathcal{V}_2 t} + B_4 e^{-\mathcal{V}_2 t} \end{aligned}$$

oder also durch

$$(III.56)$$

$$x = a_1 \cos \mathcal{V}_1 t + a_2 \sin \mathcal{V}_1 t + a_3 \cosh \mathcal{V}_2 t + a_4 \sinh \mathcal{V}_2 t$$

$$y = b_1 \cos \mathcal{V}_1 t + b_2 \sin \mathcal{V}_1 t + b_3 \cosh \mathcal{V}_2 t + b_4 \sinh \mathcal{V}_2 t,$$

wobei

$$(III.57)$$

$$a_1 = A_1 + A_2, \quad a_2 = i(A_1 - A_2), \quad b_1 = B_1 + B_2, \quad b_2 = i(B_1 - B_2)$$

$$a_3 = A_3 + A_4, \quad a_4 = A_3 - A_4, \quad b_3 = B_3 + B_4, \quad b_4 = B_3 - B_4$$

ist und die b_{σ} also von den a_{σ} ($\sigma = 1, \dots, 4$) abhängen.

Weil nach (III.49) nun $\Omega_{xy} = 0$ ist, erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen von (III.19) für den periodischen Anteil der beiden Gleichungen (III.56)

$$b_1 = \frac{2 \nu_1 a_2}{\nu_1^2 + \Omega_{yy}} ; \quad b_2 = - \frac{2 \nu_1 a_1}{\nu_1^2 + \Omega_{yy}}$$

oder, weil wegen (III.55) $z_1^2 = - \nu_1^2$ ist und damit aus (III.5) sofort

$$(III.58) \quad 4 \nu_1^2 = (\nu_1^2 + \Omega_{xx})(\nu_1^2 + \Omega_{yy})$$

ist, schließlich

$$(III.59) \quad b_1 = a_2 \frac{\nu_1^2 + \Omega_{xx}}{2 \nu_1} ; \quad b_2 = - a_1 \frac{\nu_1^2 + \Omega_{xx}}{2 \nu_1} .$$

Für den nichtperiodischen Anteil der Gleichungen (III.56) erhalten wir dagegen wegen $\Omega_{xy} = 0$ und $z = \pm \nu_2$ aus (III.17)

$$B_3 = - A_1 \frac{2 \nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{yy}} ; \quad B_4 = A_4 \frac{2 \nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{yy}}$$

und daraus mit Hilfe von (III.57)

$$(III.60) \quad b_3 = - a_4 \frac{2 \nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{yy}} ; \quad b_4 = a_3 \frac{2 \nu_2}{\nu_2^2 - \Omega_{yy}} .$$

Da hier $z_2^2 = \nu_2^2$ ist, folgt aus (III.5) nun sofort

$$(III.61) \quad 4 \nu_2^2 = (\nu_2^2 - \Omega_{xx})(\nu_2^2 - \Omega_{yy})$$

und wir erhalten damit aus (III.60) schließlich

$$(III.62) \quad b_3 = a_4 \frac{\nu_2^2 - \Omega_{xx}}{2 \nu_2} ; \quad b_4 = a_3 \frac{\nu_2^2 - \Omega_{xx}}{2 \nu_2} .$$

Als allgemeine Lösung des linearisierten Differentialgleichungssystems (III. 2), das in einem der drei kollinearen Librationszentren entwickelt wurde, erhalten wir aus (III. 56) vermittle der Beziehungen (III. 59) und (III. 62) nach Fortschaffen auftretender Nenner sofort

(III. 63)

$$\begin{aligned} x &= c_1^2 \mathcal{V}_1 \cos \mathcal{V}_1 t + c_2^2 \mathcal{V}_1 \sin \mathcal{V}_1 t + \\ &+ c_3^2 \mathcal{V}_2 \cosh \mathcal{V}_2 t + c_4^2 \mathcal{V}_2 \sinh \mathcal{V}_2 t \\ y &= -c_1(1+4D+\mathcal{V}_1^2) \sin \mathcal{V}_1 t + c_2(1+4D+\mathcal{V}_1^2) \cos \mathcal{V}_1 t - \\ &- c_3(1+4D-\mathcal{V}_2^2) \sinh \mathcal{V}_2 t - c_4(1+4D-\mathcal{V}_2^2) \cosh \mathcal{V}_2 t, \end{aligned}$$

wobei die c_1 bis c_4 vier neue, willkürliche Integrationskonstanten sind. Die Bewegung um die kollinearen Librationszentren setzt sich somit im allgemeinen aus einem periodischen und einem nichtperiodischen (exponentiellen) Anteil zusammen. Die drei kollinearen Gleichgewichtslagen L_1, L_2, L_3 sind demnach unstabil, wie bereits 1875 ROUTH [13] gezeigt hat. Instabilität liegt ebenso auch für den periodischen Anteil von (III. 63) vor; denn selbst wenn zu irgend einem Zeitpunkt c_3 und c_4 beide verschwinden, genügt eine kleine Störung, um die vier Bahnkonstanten so zu ändern, daß eine Wirkung der exponentiellen Komponente auftritt: der Probekörper verläßt dann nach einer - unter Umständen langen - Zeit die unmittelbare Umgebung des Librationszentrums. Um genauere Erkenntnisse über die partikulären Lösungen des linearisierten Differentialgleichungssystems (III. 2) zu erhalten, behandeln wir den periodischen und nichtperiodischen Anteil von (III. 63) gesondert.

1. Periodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren:

Sind die beiden Konstanten c_3 und c_4 in (III. 63) beide Null, so gibt es um jedes der drei kollinearen Librationszentren eine Familie periodischer Bahnen. Hierbei bezeichnen wir die Bahnfamilie um L_1 mit a, die um L_2 mit b und die um L_3 mit c. Jede Familie besteht (ebenso wie die Familien d und e um die LAGRANGESchen Dreieckspunkte) aus einer Schar konzentrischer, koaxialer und ähnli-

cher Ellipsen, die (wie aus der Krümmungsformel leicht nachzuweisen ist) im Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Die Umlaufzeiten sind hierbei innerhalb jeder Familie konstant, verhalten sich also tautochron. Aus (III.55), der ersten Gleichung von (III.52) und (III.51) erhalten wir sofort

$$(III.64) \quad \mathcal{V}_1^2 = 1 - D + \sqrt{9D^2 - 4D}$$

und daraus sofort die Periode $P = T / \mathcal{V}_1$ für die periodischen Bahnen jeder der drei tautochronen Familien. Die Bahnbewegung verläuft gemäß (III.36), wobei nun zu beachten ist, daß in den drei kollinearen Librationszentren nach (II.14) oder (III.49) $\Omega_{xy} = 0$ ist. Somit verläuft jeder der periodischen Bahnen auf einer Ellipse der Form

$$(III.65) \quad x^2 (\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{xx}) + y^2 (\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}) = \frac{4 \mathcal{V}_1^2}{\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}} (a_1^2 + a_2^2)$$

$$\frac{x^2}{U^2} + \frac{y^2}{V^2} = 1,$$

deren Achsen mit denen des (x, y) -Koordinatensystems zusammenfallen. Nach (III.49) bzw. (II.14) und (II.17) war in allen drei kollinearen Librationszentren $\Omega_{xx} > 0$, $\Omega_{yy} < 0$. Aus (III.58) folgt damit, daß

$$(III.66) \quad 0 < (\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}) < (\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{xx})$$

und wir erhalten daraus und aus (III.65) nach kurzer Rechnung für das Achsenverhältnis

$$(III.67) \quad \gamma = \frac{V}{U} = \sqrt{\frac{\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{xx}}{\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}}} > 1.$$

Demnach steht die große Achse senkrecht auf der x -Achse, die im übrigen (abgesehen vom Koordinatenursprung) mit der Verbindungsgeraden der beiden um ihren gemeinsamen Schwerpunkt rotierenden

Hauptkörper übereinstimmt.

Lassen wir $\mu \rightarrow 0$ gehen, so erhalten wir aus (III. 64) und (III. 48') bzw. gleich aus (III. 51')

$$(III. 68) \quad \nu_1^2 \rightarrow 2\sqrt{7} - 1 \text{ für } L_1, L_2; \quad \nu_1^2 \rightarrow 1 \text{ für } L_3;$$

womit nach (III. 67) und (III. 49') also für den Grenzwert des Achsenverhältnisses

$$(III. 69) \quad \gamma \rightarrow \sqrt{\frac{2\sqrt{7} + 8}{2\sqrt{7} - 4}} \approx 3,208 \quad \text{für } L_1, L_2$$

$$\gamma \rightarrow 2 \quad \text{für } L_3$$

gilt. Die Grenzwerte der Perioden sind, wenn wir mit T die siderische Umlaufszeit der beiden Hauptkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt bezeichnen (in den ersten Kapiteln war zur Herleitung des Differentialgleichungssystems $T = 2\pi$ gesetzt worden),

$$(III. 70) \quad P = T/\nu_1 \rightarrow 0,482\dots \cdot T \quad \text{für } L_1, L_2,$$

$$P \rightarrow T \quad \text{für } L_3$$

Hiermit können wir folgendes Ergebnis aussprechen:

Bei den periodischen Librationsbahnen um L_3 geht das Achsenverhältnis dieser Ellipsen (genau so wie bei den kurzperiodischen Librationsellipsen um L_4, L_5 ; den Bahnen der Klasse e ; man vergleiche hierzu die Formeln nach (III. 42)) gegen das Verhältnis $2:1$. In beiden Fällen gehen für $\mu \rightarrow 0$ die Umlaufszeiten des Probekörpers gegen die siderische Umlaufszeit T der beiden Hauptkörper um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, der in diesem Grenzfall natürlich im Mittelpunkt der "Sonne" ruht. Für $\mu = 0$ handelt es sich ja um ein Einkörperproblem. Demnach gehen sowohl die Librationsbahnen der Familie c als auch der Familie e im raumfesten Koordinatensystem in schwach exzentrische KEPLERSche Ellipsen über, deren Umlaufszeiten gleich T ist.

Die periodischen Librationsbahnen um L_1, L_2 verhalten sich

dagegen anders. Obwohl diese beiden Librationszentren für $\mu \rightarrow 0$ in den Ort des "Jupiters" hineinrücken, gehen diese Librationsbewegungen keineswegs in die für das rotierende Koordinatensystem charakteristischen Bahnkurven über, die in raumfesten Koordinaten den schwach exzentrischen KEPLERSchen Ellipsen mit der Umlaufzeit T entsprechen und in dem mitrotierenden Koordinatensystem (mit dem Ursprung im Librationszentrum) die Form kleiner Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $2 : 1$ und der Umlaufzeit T haben. Vielmehr ist hier bei L_1 und L_2 das Achsenverhältnis nach (III.69) größer als 3 und die Umlaufzeit nach (III.70) kleiner als $T/2$. Daß hier ganz andere Grenzwerte auftreten wie bei L_3 , ist verständlich. Denn während für $\mu \rightarrow 0$ die Librationszentren L_1 und L_2 in den Ort des "Jupiters" hineinrücken, wo die Potentialfunktion Ω eine Singularität besitzt und $+\infty$ wird, ist der Bereich um die jupiternahen Librationszentren, in denen Ω_x , Ω_y durch die rechten Seiten von (III.2) dargestellt werden, sehr klein gegen den Abstand des jeweiligen Librationszentrums vom "Jupiter". Natürlich ist dieser Bereich um so kleiner, je kleiner μ wird, d.h. je näher das Librationszentrum an den Jupiterort heranrückt. Ein Probekörper, der dann in L_1 oder L_2 verharnt, ist als Satellit des "Jupiters" aufzufassen, dessen siderische Umlaufzeit gleich der des "Jupiters" um die "Sonne" ist. Vom "Jupiter" aus gesehen erscheint dieser Satellit, wenn er sich in L_1 aufhält, stets als "Neumond", wenn er sich dagegen in L_2 aufhält, stets als "Vollmond". Demnach sind die bezüglich der Amplituden kleinen periodischen Librationen der Familien a (um L_1) und b (um L_2) als kleine periodische Störungen der Kreisbewegung des Satelliten aufzufassen, deren Perioden im rotierenden Koordinatensystem für $\mu \rightarrow 0$ nach (III.70) dem Grenzwert $T \cdot 0,482\dots$ zustreben und deren Amplituden stets klein gegen den Abstand "Jupiter"-Satellit bleiben müssen.

2. Unperiodische Bahnen um die kollinearen Librationszentren.

Setzen wir in der allgemeinen Lösung (III.63) des linearisierten Differentialgleichungssystems (III.2) die beiden Konstanten $c_1 = c_2 = 0$, so bleiben uns für den unperiodischen Anteil die beiden

Gleichungen

$$(III. 71) \quad \begin{aligned} x &= c_3^2 \sqrt{2} \cosh \sqrt{2}t + c_4^2 \sqrt{2} \sinh \sqrt{2}t \\ y &= -c_3(1+4D - \sqrt{2}^2) \sinh \sqrt{2}t - c_4(1+4D - \sqrt{2}^2) \cosh \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Dividieren wir nun die erste dieser Gleichungen durch $2 \sqrt{2}$, die zweite durch $(1 + 4 D - \sqrt{2}^2)$ und bilden die Quadrate dieser so entstandenen Gleichungen, so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4 \sqrt{2}^2} &= c_3^2 \cosh^2 \sqrt{2}t + 2 c_3 c_4 \sinh \sqrt{2}t \cosh \sqrt{2}t + c_4^2 \sinh^2 \sqrt{2}t \\ \frac{y^2}{(1+4D - \sqrt{2}^2)^2} &= c_3^2 \sinh^2 \sqrt{2}t + 2 c_3 c_4 \sinh \sqrt{2}t \cosh \sqrt{2}t + c_4^2 \cosh^2 \sqrt{2}t. \end{aligned}$$

Ziehen wir nun die zweite Gleichung von der ersten ab, so ergibt sich mit

$$\frac{x^2}{4 \sqrt{2}^2} - \frac{y^2}{(1+4D - \sqrt{2}^2)^2} = c_3^2 - c_4^2$$

eine Hyperbelgleichung, für die wir nach Division durch

$$\left| c_3^2 - c_4^2 \right| \quad \text{auch}$$

$$(III. 72) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{mit}$$

$$a^2 = 4 \sqrt{2}^2 \left| c_3^2 - c_4^2 \right|, \quad b^2 = (1+4D - \sqrt{2}^2)^2 \left| c_3^2 - c_4^2 \right|$$

schreiben können. Hierbei ist das Vorzeichen auf der rechten Seite von (III. 72) durch das Vorzeichen der Differenz $(c_3^2 - c_4^2)$ bestimmt. Die Kurven bilden also eine Schar koaxialer, ähnlicher Hyperbeln und der zu ihnen konjugierten Hyperbeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt im jeweiligen Librationszentrum liegt. Ist $(c_3^2 - c_4^2)$ positiv, so fällt die reelle Achse der Hyperbeln mit der x-Achse zusammen.

men, ist dagegen $(c_3^2 - c_4^2)$ negativ, so fällt die reelle Achse mit der y -Achse zusammen. Beide Scharen haben die gemeinsamen Asymptoten $b^2 x^2 = a^2 y^2$ mit den Richtungskonstanten

$$(III. 73) \quad b/a = \pm (1 + 4D - \sqrt{2}) / 2 \sqrt{2}.$$

Wir betrachten nun den Fall der nichtperiodischen Bahnen in der Nähe des Librationszentrums L_3 . In diesem ist nach (II. 35) bis auf Glieder der Ordnung μ^3

$$r = 1 - \frac{7}{12} \mu + \dots, \quad \vartheta = 2 \left(1 - \frac{7}{12} \mu + \dots \right)$$

und daher mit gleicher Genauigkeit nach (III. 48)

$$(III. 74) \quad 2D = 1 + \frac{7}{8} \mu + \frac{77}{192} \mu^2 + \dots$$

Da es sich um den aperiodischen Anteil von (III. 63) handelt, ist

$\sqrt{2} = z^2$ die positive Lösung von (III. 51), womit also nach (III. 52)ff und (III. 74)

$$\sqrt{2}^2 = D - 1 + \sqrt{9D^2 - 4D} = \frac{21}{8} \mu - \frac{119}{64} \mu^2 + \dots$$

ist. Hiermit und (III. 73) erhalten wir nach kurzer Rechnung die Richtungskonstanten der beiden Asymptoten $\pm b/a$ zu

$$\frac{b}{a} = - \sqrt{\frac{6}{7\mu}} \left(1 - \frac{\mu}{16} + \dots \right).$$

Wir hatten an mehreren Stellen schon als Beispiel den Planeten Jupiter unseres Sonnensystems hinzugezogen ($\mu \approx 1/1048$). Mit guter Annäherung erhalten wir hier $b/a \approx - \sqrt{898,2} \approx - 29,9$. Die Asymptoten schließen somit mit der y -Achse einen sehr kleinen Winkel ein. Demnach existiert eine Schar sehr flacher Hyperbeln, deren Scheitel auf der x -Achse liegen, und eine dazu konjugierte Schar sehr spitzer Hyperbeln, die mit der x -Achse keine Scheitelpunkte haben.

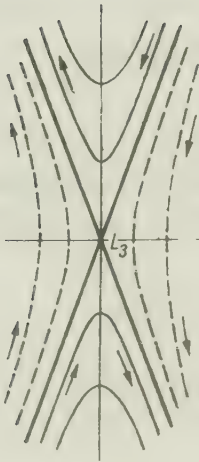


Abb. 7

Wir wollen nun noch

rasch herausbekommen, in welcher Richtung der Probekörper diese Hyperbeln durchläuft.

Setzen wir für die Bewegung in der ersten Schar

$$c_3^2 > c_4^2 = 0,$$

also nach (III.71)

$$x = c_3^2 \sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t, \quad y = -c_3 (1 + 4D - \sqrt{2}^2) \sinh \sqrt{2} t.$$

Damit wird

$$\dot{y} = -(1 + 4D - \sqrt{2}^2) c_3 \sqrt{2} \cosh \sqrt{2} t = \frac{1}{2} (\sqrt{2}^2 - 1 - 4D) x.$$

Weil aber nach (III.49)

$$(\sqrt{2}^2 - 1 - 4D) = (\sqrt{2}^2 - \Omega_{xx}), \quad \Omega_{yy} < 0$$

ist, so folgt daraus sofort vermittelt (III.61), daß

$$(III.75) \quad (\sqrt{2}^2 - 1 - 4D) < 0$$

und somit $\dot{y}$ und x stets verschiedene Vorzeichen haben (in Abb. 7 gestrichelte Linien). Setzen wir dagegen für die Bewegung der konjugierten Schar, deren reelle Achse auf der Verbindungsgeraden "Sonne" - "Jupiter" senkrecht steht, $c_4^2 > c_3^2 = 0$, so erhalten wir aus (III.71)

$$x = c_4^2 \sqrt{2} \sinh \sqrt{2} t, \quad y = c_4 (\sqrt{2}^2 - 1 - 4D) \cosh \sqrt{2} t$$

und daraus weiter

$$(III. 75') \quad \dot{x} = \frac{2 \sqrt{2}}{(\sqrt{2}^2 - 1 - 4D)} \cdot y,$$

weshalb ebenfalls wegen (III. 75) $\dot{x}$ und y verschiedene Vorzeichen haben (ausgezogene Linien in Abb. 7). Zu den gleichen Aussagen für die unperiodischen Bewegungen in unmittelbarer Nähe der LAGRANGE-schen Librationszentren L_1 und L_2 , kommen wir, wenn wir die für diese Punkte gültigen Zahlenwerte für $\sqrt{2}$, Ω_{xx} , Ω_{yy} und D benutzen.

§ 11 Beziehungen zwischen den CHARLIERSchen Bahnen, ihren JACOBI'schen Konstanten und HILL'schen Grenzkurven.

Die Lösungsbahnen der linearisierten Differentialgleichungen (III. 2) werden im allgemeinen natürlich nicht genau einer der beiden möglichen Bahnfamilien angehören. So werden die engen Bahnen um die drei kollinearen Librationszentren bei beliebig vorgegebenen Anfangsbedingungen sich vielmehr gemäß (III. 63) aus Bestandteilen der periodischen als auch der unperiodischen Bahnfamilie zusammensetzen.

Eine entsprechende Aussage gilt natürlich auch für die Librationsbahnen um die LAGRANGE'schen Dreieckspunkte. Nach (III. 22) handelt es sich bei diesen im allgemeinen um eine Superposition der beiden Familien d und e . Hier gilt jedoch für die partikulären Lösungen des linearisierten Systems (III. 2) (also Bewegungen, die nur einer der beiden Familien d oder e angehören) folgender wichtiger

Satz: Die JACOBI'sche Konstante aller Bahnen der CHARLIERSchen Klasse d ist stets größer, die aller Bahnen der CHARLIERSchen Klasse e dagegen immer kleiner als 3.

Hierzu ist zunächst folgendes zu bemerken: Unter Berücksichtigung von (II. 3), (II. 19) und den Ergebnissen aus Paragraph 6 vor (II. 43) besagt dieser Satz, daß für die Bahnen der Familie e keine verbotenen Gebiete existieren, jede Bahn der Familie d jedoch eine HILL'sche Grenzkurve

besitzt, eigentlich zwei, die symmetrisch zur x -Achse liegen, aber nur die um das jeweilige Librationszentrum ist hier von weiterem Interesse. Da nun für eine Bahn der Familie d - etwa $\int_0$ - nach (III.13) und der ersten Gleichung von (III.26) zumindest für kleine μ auch die Bahngeschwindigkeit verhältnismäßig klein bleibt, weicht nach (II.41) die Spur von $\int_0$ sicher nie groß von der ihr zugehörigen HILLschen Grenzkurve H_0 ab.

Doch beweisen wir nun rasch diesen Satz!

Hierzu bilden wir das JACOBI'schen Integral des in einem der beiden Dreieckspunkten linearisierten Systems (III.2). Wir erhalten es analog Paragraph 3, indem wir nach Linearisierung von (III.2) deren erste Gleichung mit $\dot{x}$, deren zweite mit $\dot{y}$ multiplizieren, danach aufaddieren und anschließend integrieren, oder noch einfacher, indem wir die rechte Seite von (I.22) in einem der beiden dreieckigen Librationszentren entwickeln und diese TAYLOR Reihe nach den quadratischen Gliedern abbrechen. Unser verkürztes JACOBI'sches Integral lautet dann

$$(III.76) \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = x^2 \Omega_{xx} + 2xy \Omega_{xy} + y^2 \Omega_{yy} - (c - 3),$$

wobei die hier auftretenden partiellen Ableitungen nach x und y durch (II.11) gegeben sind.

Wir differenzieren zunächst beide Gleichungen (II.27) nach t und multiplizieren diese Ableitungen

$$\dot{x} = -a_1 \sqrt{1} \sin \sqrt{1} t + a_2 \sqrt{1} \cos \sqrt{1} t$$

$$\dot{y} = -b_1 \sqrt{1} \sin \sqrt{1} t + b_2 \sqrt{1} \cos \sqrt{1} t$$

mit sich selbst. Die Summe dieser so entstandenen Quadrate lautet dann:

(III.77)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \sqrt{1}^2 [(a_1^2 + a_2^2) \sin^2 \sqrt{1} t - (a_1 a_2 + b_1 b_2) \sin 2 \sqrt{1} t + (a_2^2 + b_2^2) \cos^2 \sqrt{1} t].$$

Multiplizieren wir andererseits beide Gleichungen aus (III.27) mit sich selbst, so erhalten wir aus der Summe dieser Quadrate nach Multiplikation mit $\sqrt{1}^2$ sofort

(III. 78)

$$\mathcal{V}_1^2(x^2 + y^2) = \mathcal{V}_1^2[(a_1^2 + b_1^2) \cos^2 \mathcal{V}_1 t + (a_1 a_2 + b_1 b_2) \sin 2 \mathcal{V}_1 t + (a_2^2 + b_2^2) \sin^2 \mathcal{V}_1 t].$$

Addieren wir (III. 77) und (III. 78), so erhalten wir sofort

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \mathcal{V}_1^2(x^2 + y^2) = \mathcal{V}_1^2(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2).$$

Eliminieren wir aus dieser Gleichung vermittels (III. 76) das Geschwindigkeitsquadrat, so ergibt sich die Beziehung

$$x^2(\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{xx}) + 2xy \Omega_{xy} + a^2(\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}) = c - 3 + \mathcal{V}_1^2(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2),$$

oder also nach einem Vergleich mit (III. 36) und (III. 37)

$$(III. 79) \quad R^2 = \frac{4 \mathcal{V}_1^2}{\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}} (a_1^2 + a_2^2) = c - 3 + \mathcal{V}_1^2(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)$$

und daraus dann nach (III. 34)

$$(III. 80) \quad (c - 3)(\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}) = \mathcal{V}_1^2(a_1^2 + a_2^2)[4 - (\Omega_{xx} + \Omega_{yy}) - 2 \mathcal{V}_1^2].$$

Da aber in den Librationszentren L_4, L_5 nach (II. 11) nun

$$\Omega_{xx} + \Omega_{yy} = 3 \text{ ist, erhalten wir schließlich aus (III. 80) und (III. 79)}$$

$$(III. 81) \quad c = 3 + \mathcal{V}_1^2 \frac{a_1^2 + a_2^2}{\mathcal{V}_1^2 + \Omega_{yy}} (1 - 2 \mathcal{V}_1^2) = 3 + \frac{R^2}{4} (1 - 2 \mathcal{V}_1^2)$$

Wenn wir $\mathcal{V}_1$ mit $\mathcal{V}_2$, weiter a_1, a_2 mit a_2 bzw. a_4 und entsprechend b_1, b_2 mit b_3 bzw. b_4 vertauschen, kommen wir (abgesehen von den entsprechenden Indizes) auf die gleiche Formel. Weil aber wegen der Ergebnisse am Schluß des Paragraphen 9 und (III. 25) stets

$$\mathcal{V}_1^2 < 1/2, \quad \mathcal{V}_2^2 > 1/2 \quad (\mathcal{V}^2 = \frac{1}{2} \text{ gilt nur für den Grenzfall (Fall 2):}$$

$\oint(\mu) = 0$ in Paragraph 9) ist, erhalten wir aus (III. 81) schließlich die Behauptung obigen Satzes.

Nun wenden wir uns zum Schluß dieses Kapitels noch einmal den infinitesimalen Bahnen in der Nähe der kollinearen Librationszentren zu, den Lösungen des linearisierten Systems (III. 2). Wie früher können wir uns hierbei auf L_3 bzw. auf eine Umgebung dieses Librationszentrums beschränken, da die gleichen Regeln für die Bewegungsmöglichkeiten eines Probekörpers auch für die beiden anderen Librationszentren gelten. Zwischen den drei möglichen partikulären Lösungsscharen aus Paragraph 10 (periodische Bahnen, Hyperbelbahnen und den hierzu konjugierten Hyperbelbahnen) und den ihnen zugehörigen JACOBI'schen Konstanten bzw. HILLSchen Grenzkurven gibt es nämlich noch einige bemerkenswerte Beziehungen, auf die wir jetzt noch etwas näher eingehen wollen. Nach Kapitel III, (II. 18) hat die Potentialfunktion Ω in L_3 einen Sattelpunkt und es ist nach (II. 19) in diesem Punkt $2\Omega > 3$. In einer infinitesimal kleinen Umgebung von L_3 hat somit die Schnittkurve $c = 2\Omega(x_{L_3}, 0)$ die Gestalt zweier sich schneidenden Geraden. Diese beiden Geraden sind die Asymptoten zweier zueinander konjugierten Hyperbelscharen, die wir übrigens dadurch erhalten, daß wir unsere Potentialfunktion (II. 3) nach TAYLOR entwickeln, nach den in x und y quadratischen Gliedern abbrechen und den so entstandenen Ausdruck mit den Ebenen $z = c$, $c \gtrless 2\Omega(x_{L_3}, 0)$ zum Schnitt bringen; es handelt sich hier natürlich um Scharen infinitesimaler HILL'scher Grenzkurven. Ist die Konstante c etwas größer als $2\Omega(x_{L_3}, 0)$, so ist nach (II. 19) und Paragraph 6 die Schnittkurve eine Hyperbel mit dem Scheitel auf der x -Achse, ist dagegen c etwas kleiner als $2\Omega(x_{L_3}, 0)$, so ist sie eine Hyperbel der konjugierten Schar mit dem Scheitel auf der y -Achse. Die verbotenen Gebiete (in der Abbildung schraffiert gezeichnet), in die ein Probekörper mit der JACOBI'schen Konstanten c nicht eindringen kann, stellen offenbar diejenigen Bereiche der Ebene dar, für die $2\Omega(x, y) < c$ gilt.

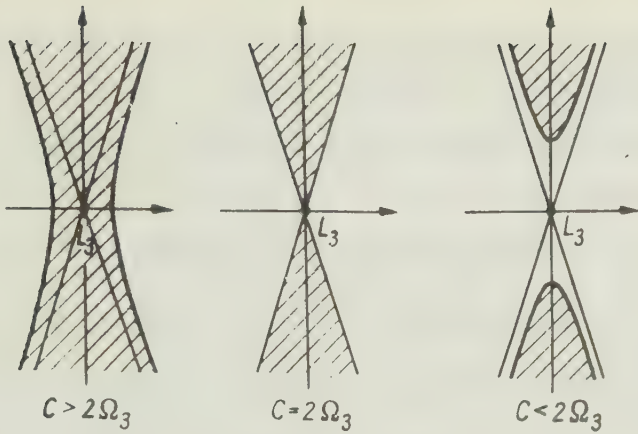


Abb. 8 verbotene Gebiete in der Umgebung von L_3

Aus diesem Ergebnis können wir sofort einige wichtige Folgerungen ziehen: Die periodischen Bewegungen, "Ellipsen der Familie c , die im



Abb. 9 Bahn der Familie c

mathematisch negativen Sinn durchlaufen werden, sind nur möglich, wenn die ihnen zugehörigen JACOBI'schen Konstanten $c < 2 \Omega(x_{L_3}, 0)$ ist.

Hyperbolische Bewegungen mit Scheiteln auf der x-Achse dagegen sind immer möglich,

aber für $c > \Omega(x_{L_3}, 0)$ nur,

wenn - wie eine genauere Untersuchung zeigt - die jeweilige reelle Halbachse a größer ist als ein Minimalwert, der dem Ausdruck

$(c - 2 \Omega(x_{L_3}, 0))$ proportional ist. Hyperbeln der konjugierten Schar

sind nur dann mögliche Bahnformen, wenn $c < 2 \Omega(x_{L_3}, 0)$ ist; die

reelle Halbachse muß dann aber kleiner als ein zu $(2 \Omega(x_{L_3}, 0) - c)$

proportionaler Maximalwert sein.

Nun geben wir eine JACOBI'sche Konstante $c_0 : c_0 < 2 \Omega(x_{L_3}, 0)$ vor. Wie wir oben sahen, sind die zu diesem c_0 gehörenden HILL'schen Grenzkurven $H_0^{(\nu)}$ (für $\nu = 1$ in der oberen, $\nu = 2$ in der unteren Halbebene liegend) Hyperbeläste mit den Scheiteln auf der y -Achse. Wie wir weiter gesehen haben, existieren zu diesen $H_0^{(\nu)}$ einmal zwei bezüglich der x -Achse zueinander antisymmetrische Hyperbelbahnen (deren Scheitel ebenfalls auf der y -Achse liegen), wobei ein Probekörper nach (III. 75') und (III. 75) auf dem Ast der oberen Halbebene eine Bewegung von rechts nach links ausführt; zum andern existiert zu diesen $H_0^{(\nu)}$ eine periodische, ellipsenförmige Bahn, deren große Halbachse nach Paragraph 10 senkrecht auf der x -Achse steht und vom Probekörper im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Diese letzte Aussage läßt sich auch noch einmal durch folgende Gleichung (III. 82) gewinnen, die uns außerdem noch für spätere Untersuchungen nützlich erscheint: Setzen wir nämlich in (III. 63) alle Konstanten c_ν mit Ausnahme von $c_2 > 0$ gleich Null und differenzieren wir sodann die erste Gleichung nach t , so erhalten wir aus dieser Ableitung vermittels der zweiten Gleichung von (III. 63) nach Elimination von $\cos \nu_1 t$ analog zu (III. 75') sofort die Beziehung

$$(III. 82) \quad \dot{x} = \frac{2 \nu_1^2 y}{(\nu_1^2 + 4 D + 1)}$$

für die periodischen Librationen um die kollinearen Librationszentren.

Das JACOBI'sche Integral für diese Bahnen (Ellipse, Hyperbeln) hat dieselbe Form wie (III. 76)

$$(III. 83) \quad \begin{aligned} \tilde{c}_0 &= x^2 \Omega_{xx} + 2xy \Omega_{xy} + y^2 \Omega_{yy} - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ \tilde{c}_0 &= c_0 - 2 \Omega(x_{L_\nu}, 0), \quad (\nu = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

wobei nach (II. 14) nun $\Omega_{xy} = 0$ ist. Wir haben bereits diejenigen Bahnen (die Ellipsenbahn und die Hyperbelbahn, deren Scheitel auf der

positiven y -Achse liegt) herausgegriffen, die zur Zeit $t = 0$ die y -Achse senkrecht schneiden. Sollen diese beiden Bahnen $H_O^{(1)}$ zur HILLSchen Grenzkurve haben, so muß natürlich jede für sich der Gleichung (III. 83) genügen. Speziell muß also für $t = 0$ gelten:

$$\tilde{c}_0 = y_2^2(0) \Omega_{yy} - \dot{x}_2^2(0) \quad \text{für die Hyperbel}$$

$$\tilde{c}_0 = y_1^2(0) \Omega_{yy} - \dot{x}_1^2(0) \quad \text{für die Ellipse.}$$

Hieraus und den Gleichungen (III. 75') und (III. 82) erhalten wir sofort

$$y_1^2(0) \left[\frac{4 \nu_1^2}{(\nu_1^2 + 4D + 1)^2} - \Omega_{yy} \right] = y_2^2(0) \left[\frac{4 \nu_2^2}{(\nu_2^2 - 4D - 1)^2} - \Omega_{yy} \right],$$

wobei nach (II. 17) ja $-\Omega_{yy} > 0$ und somit die beiden Klammerausdrücke auf jeden Fall positiv sind. Wir haben das Ergebnis in Abb. 10 festge-

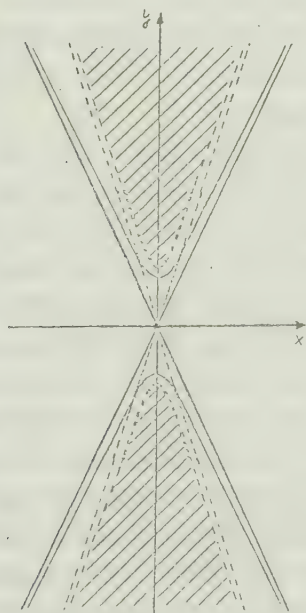


Abb. 10

halten: schraffiert wieder die verbotenen Gebiete, gestrichelt die beiden HILLSchen Grenzkurven $H_O^{(1)}$ und $H_O^{(2)}$ und die zur Schar dieser Grenzkurven gehörenden Asymptoten. Ausgezogen dagegen sind die zu diesen HILLSchen Grenzkurven gehörenden partikulären Lösungen und die beiden Asymptoten der Schar der Hyperbelbahnen.

Im allgemeinen wird unser Probekörper sich nun nicht auf einer

Bahn bewegen, die genau einer der beiden (von einander wesentlich verschiedenen) Scharen angehört.

§ 12. Erweiterungen der CHARLIERSchen Theorie.

Wir hatten bisher ausführlich die Theorie der CHARLIERSchen Bahnen entwickelt. Das Problem der Bewegungsmöglichkeiten eines Probekörpers in unmittelbarer Nähe eines der fünf Librationszentren wurde unter folgender wesentlicher Einschränkung gelöst: Der Abstand des Probekörpers vom jeweiligen Librationszentrum sollte stets so klein bleiben, daß im Differentialgleichungssystem (III, 2) die Potenzen mindestens zweiter Ordnung in den beiden abhängigen Variablen gegen den Abstand der beiden Hauptkörper vernachlässigt werden konnten. Da es sich aber bei Lösungen von Differentialgleichungen um eine globale Aussage handelt, bei der (ähnlich wie bei dem im Paragraph 9 erwähnten Problem der Stabilität der LAGRANGESchen fünf Gleichgewichtslösungen) auch noch so kleine Glieder höherer Ordnung den Lösungscharakter des verkürzten Systems wesentlich verändern können, gelten die CHARLIERSchen Lösungen nur für eine infinitesimale Umgebung der Librationszentren. In der Praxis fallen also die CHARLIERSchen Librationsbahnen mit den LAGRANGESchen trivialen Lösungen zusammen. Dennoch zeitigte die CHARLIERSche Theorie ein wichtiges Ergebnis: Wir erhielten Auskünfte über den Charakter des Bahnverhaltens.

Im Sinne einer Verallgemeinerung der CHARLIERSchen Theorie hat als erster PLUMMER [11], [15] den Versuch unternommen, die Theorie durch die Berücksichtigung höherer Glieder der rechten Seite von (III, 2) zu erweitern. Während sich PLUMMER nun auf den mathematisch einfachen Fall der periodischen Librationen um die kollinearen Librationszentren beschränkte, dehnte WILLARD [20] dieses Verfahren auf die Librationsbahnen der Familie e aus. Natürlich geben diese Untersuchungen keinerlei Aufschlüsse auf die Form der Bahn beliebig großer Amplitude. Trotzdem lassen sich aus diesen Untersuchungen wertvolle Aufschlüsse darüber gewinnen, wie sich die Bahnformen und Perioden ändern, wenn man von unendlich kleinen Librationen (den periodischen CHARLIERSchen Bahnen) auf solche übergeht, bei denen niedrige Potenzen der Abstände vom Librationszentrum nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Wir wollen hier nur kurz auf die PLUMMERSchen Ergebnisse eingehen. Vernachlässigt man in

(III. 2) die Glieder mindestens dritter Ordnung, so läßt sich nach [15] feststellen, in welcher Weise sich die kollinearen elliptischen Librationsbahnen deformieren, wenn man von unendlich kleinen Amplituden zu größeren übergeht. Es zeigt sich, daß der Bahnmittelpunkt aus dem jeweiligen Librationszentrum herausrückt und daß die Ellipsen ihre Antisymmetrie bezüglich der y -Achse langsam verlieren und ein (nach Paragraph 7 im Bezug auf die x -Achse natürlich antisymmetrische) bohnenartig verkrümmte Gestalt annehmen. Außerdem setzt eine Änderung der Periode ein und zwar, wenn α ein Scharparameter von der Größenordnung der Amplitude ist, beginnend mit einem Term, der quadratisch in α ist. Zu den gleichen Ergebnissen gelangt man auch bei den Librationsbahnen um die LAGRANGESchen Dreieckspunkte L_4 und L_5 .

Obwohl diese Ergebnisse eine hinsichtlich der Anschauung schöne Erweiterung der CHARLIERSchen Theorie darstellen und zahlreiche numerische Rechnungen i. b. unter STRÖMGREN dafürsprachen, konnte erst 1930 WINTER [21] eine wesentliche charakteristische Eigenschaft für gewisse Lösungen des nicht verkürzten Systems (III. 2) in einer Umgebung der Librationszentren mit mathematischer Strenge nachweisen. WINTER bewies unter den in diesem Kapitel getroffenen Voraussetzungen als erster die Existenz periodischer Bahnen in einer kleinen, aber endlichen Umgebung der fünf Librationszentren. Mit anderen Worten lassen sich also alle periodischen CHARLIERSchen Bahnen (mit eventueller Ausnahme des Falles 2 in § 9 ($\Phi(\mu) = 0$)) auf endliche Umgebungen der Librationszentren fortsetzen. Weitere Beweise stammen von PERRON [10] und von SIEGEL [14]. Über ihre Gestalt bzw. deren Verformung beim Übergang von den CHARLIERSchen Librationsellipsen zu den endlichen periodischen Bahnen sagen die eben zitierten Arbeiten nichts aus, obwohl gerade dies von einigem Interesse wäre. Fand man doch an der Sternwarte Heidelberg zu Anfang dieses Jahrhunderts in einer bisweilen recht großen Entfernung von den beiden LAGRANGESchen Dreieckspunkten unseres Sonne-Jupitersystems die ersten Planetoiden, die nach HEDEN HOMERS benannt in ihrer Gesamtheit als Trojaner bezeichnet werden. Widmen wir unsere Aufmerksamkeit noch einmal den (infinitesimalen, langperiodischen) Librationsellipsen der CHARLIERSchen Klasse d .

Nach (III;24) galt für das Massenverhältnis Jupiter - Sonne

$\mu \approx 1:1048,35$, weshalb wir nach (III;42) zu einem Achsenverhältnis

$\vartheta \approx \sqrt{3\mu} \approx 1:18,69$ kamen und erhalten für den Winkel φ , den die Verlängerung der kleinen Halbachse der Librationsellipse mit der Verbindungsgeraden Sonne - Jupiter bildet, nach (III;38) $\varphi \approx 29^{\circ} 58^m$.

Die kleine Halbachse zeigt also fast in das Zentrum der Sonne, die große Halbachse verläuft dagegen nahezu tangential zu dem Einheitskreis, den der Jupiter um die Sonne beschreibt. Nach (III;23) werden die Librationsellipsen tantochron durchlaufen und besaßen nach (III;26) eine Periode von etwa $147^a 42$, weshalb wegen der somit sehr kleinen Bahngeschwindigkeit sich ein Probekörper vom Typ der "Trojaner" nach § 6 und dem Satz aus § 11 stets in der Nähe der seiner Bewegung zugeordneten (hier natürlich ebenfalls infinitesimalen und ellipsenförmigen) HILLschen Nullgeschwindigkeitskurve aufhält, die durch (III;76) und (III;81)

mit $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$ gegeben ist und deren Inneres seine Bahn als "verbotenes Gebiet" eng umschließt.

§ 13. Eine Formel für die Bahnkrümmung.

In diesem Paragraphen wollen wir uns ein Hilfsmittel herleiten, das uns noch von einigem Nutzen sein wird und uns einige überraschende Folgerungen gestattet. Dabei gehen wir aus von dem Differentialgleichungssystem (I, 20), wobei durch die Normierung (I, 21) wiederum $\omega = 1$ ist. Im Paragraph 3 hatten wir das JACOBIsche Integral

$$(I, 22) \quad v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2 \Omega(x, y) - c$$

dadurch gewonnen, daß wir mittels (I, 21) die erste Gleichung von (I, 20) mit $\dot{x}$, die zweite mit $\dot{y}$ multiplizierten, die so entstandenen Gleichungen aufaddierten und das Ergebnis integrierten. Im Gegensatz hierzu wollen wir nun die erste Gleichung von (I, 20) mit $\dot{y}$, die zweite mit $\dot{x}$ multiplizieren und die so entstandene zweite Gleichung von der ersten subtrahieren. Wegen $\omega = 1$ erhalten wir dann alsbald den Ausdruck

$$\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = 2 [\dot{x}^2 + \dot{y}^2] + \dot{y} \Omega_x - \dot{x} \Omega_y$$

Dividieren wir diese Gleichung noch durch $[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}$, so ergibt sich als Formel der Bahnkrümmung

$$\tilde{\kappa} = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} = \frac{2}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2}} + \frac{\dot{y} \Omega_x - \dot{x} \Omega_y}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

oder aber, wenn wir die Geschwindigkeit

$$[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{1/2} \quad \text{noch durch das JACOBIsche Integral (I, 22) ausdrücken}$$

$$(III; 84) \quad \tilde{\kappa} = \frac{\dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y}}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{2 \Omega(x, y) - c}} + \frac{\dot{y} \Omega_x - \dot{x} \Omega_y}{[2 \Omega(x, y) - c]^{3/2}}.$$

Es ist vielleicht zu bemerken, daß dieser Ausdruck für die Bahnkrümmung sich von der in Lehrbüchern verwendeten Darstellung um den Faktor -1

unterscheidet; $\mathcal{R}$ ist also positiv, wenn es sich um eine Rechtskrümmung, negativ dagegen, wenn es sich um eine Linkskrümmung handelt. Wir haben uns dazu entschlossen, damit der erste Term (III. 84), der offenbar stets umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit v ist, positiv ausfällt. Der Zähler des zweiten Terms (III;84) läßt sich offenbar als inneres Produkt

$$(III;85) \quad \dot{y} \Omega_x - \dot{x} \Omega_y = (-\Omega_y, \Omega_x)(\dot{x}, \dot{y})$$

der Bahngeschwindigkeit $(\dot{x}, \dot{y})$ und dem um einen rechten Winkel in positiver Richtung gedrehten Gradienten der Potentialfunktion

$\Omega(x, y)$ deuten.

Folgerung 1: In den Librationszentren hängt die Krümmung nur vom Betrag der Geschwindigkeit, nicht von der Geschwindigkeitsrichtung ab, da dort mit dem Verschwinden der partiellen Ableitungen erster Ordnung der ganze zweite Term von (III;84) zu Null wird und nur der erste, stets positive, übrig bleibt. In diesen Zentren sind für die Bahnen also nur Rechtskrümmungen möglich, wobei der Krümmungsradius offenbar stets direkt proportional zur Geschwindigkeit ist.

Folgerung 2: Verläuft die Bahn des Probekörpers in Richtung des Gradienten der Potentialfunktion $\Omega(x, y)$ bzw. entgegengesetzt, so ist - weil hierbei ebenfalls der zweite Term aus (III;84) verschwindet - die Bahn ebenfalls rechtsgekrümmt mit direkt zum Betrag der Geschwindigkeit proportionalem Bahnkrümmungsradius.

Ist nun (x_0, y_0) ein Punkt auf der HILL'schen Grenzkurve, so gilt im JACOBI'schen Integral (I. 22) für die Konstante $c = 2 \Omega(x_0, y_0)$ und es ist damit im Fall, daß die Bahn den Gradienten von $\Omega(x, y)$ tangiert, die Krümmung

$$(III;86) \quad \mathcal{R} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0)}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Delta x \Omega_x(\bar{x}, \bar{y}) + \Delta y \Omega_y(\bar{x}, \bar{y})}}$$

Hierbei soll (x_0, y_0) der Schnittpunkt der Kurve $\Omega(x, y) = \frac{c}{2}$ mit

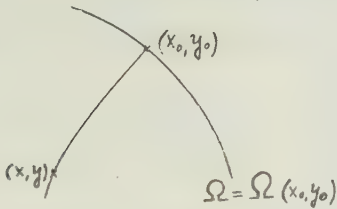


Abb. 11

der Kurve des Gradientenfeldes von $\Omega(x, y) = \text{konstant}$ sein, die durch den Punkt (x, y) geht und $(\tilde{x}, \tilde{y})$ auf deren Verbindungsgeraden liegen. Da nun bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\Delta x = \frac{\Omega_x(x_0, y_0)}{\sqrt{\Omega_x^2(x_0, y_0) + \Omega_y^2(x_0, y_0)}} \Delta \ell,$$

$$\Delta y = \frac{\Omega_y(x_0, y_0)}{\sqrt{\Omega_x^2(x_0, y_0) + \Omega_y^2(x_0, y_0)}} \Delta \ell$$

ist, wobei $\Delta \ell$ die Distanz der Punkte (x, y) und (x_0, y_0) bedeutet, erhalten wir als asymptotischen Wert für die Krümmung

$$\tilde{\kappa} = \sqrt{2} : \left(\frac{4}{\sqrt{\Omega_x^2(x_0, y_0) + \Omega_y^2(x_0, y_0)}} \cdot \sqrt{\Delta \ell} \right),$$

oder

$$(III; 87) \quad \tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta \ell}}, \quad A = \frac{2}{\sqrt{\Omega_x^2(x_0, y_0) + \Omega_y^2(x_0, y_0)}}.$$

Für die Bahnkrümmung eines Probekörpers des Eingeschränkten Dreikörperproblems, der nach (II; 42) seine zugehörige HILL'sche Nullgeschwindigkeitskurve stets senkrecht erreicht und wieder verläßt, ließe sich folgern, daß diese dort positiv unendlich von der Ordnung $\sqrt{\Delta \ell}$ ist mit dem Faktor

$\sqrt{\frac{2}{A}}$. In einer genaueren Untersuchung werden wir später zeigen, daß dies richtig ist bis auf den wahren Faktor $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{A}}$.

Da (III;85) dem Betrage nach extremal wird, wenn die Bahngeschwindigkeit senkrecht zum Gradienten der Potentialfunktion liegt und beim gleichen Betrag der Geschwindigkeit (III;85) sich nur dem Vorzeichen nach unterscheidet, ob nun der rechte Winkel im mathematisch positiven oder negativen Sinn gedreht ist, hat die Krümmung

$$(III;88) \quad \tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0)}} + \frac{(-\Omega_y(x, y), \Omega_x(x, y))(\dot{x}, \dot{y})}{\sqrt{8} [\Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0)]^{3/2}}$$

ein Maximum, wenn $(\dot{x}, \dot{y})$ in Richtung $(-\Omega_y(x, y), \Omega_x(x, y))$ und

ein Minimum, wenn $(\dot{x}, \dot{y})$ in Richtung $(\Omega_y(x, y), -\Omega_x(x, y))$ ist.

$$\text{Mit } (\dot{x}, \dot{y}) = \pm \frac{(-\Omega_y(x, y), \Omega_x(x, y))}{\sqrt{\Omega_x^2(x, y) + \Omega_y^2(x, y)}}$$

wird aus (III.) vermöge des JACOBI'schen Integrals

$$(III;89) \quad \tilde{\kappa} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0)}} \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\Omega_x^2(x, y) + \Omega_y^2(x, y)}}{\Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0)}$$

Weil der Zähler des zweiten Terms von Null verschieden ist, auch für $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, der Nenner des zweiten Terms für diesen Grenzübergang stärker gegen Null geht als der Nenner des ersten Terms, ergibt sich

Folgerung 3: in hinreichender Nähe ihrer HILL'schen Grenzkurve kann eine Bahnkurve, je nach der Richtung ihrer Geschwindigkeit sowohl rechts- als auch linksgekrümmt sein. Da die Bahnkrümmung sich stetig mit der Geschwindigkeitsrichtung ändert und dies streng monoton zwischen den beiden zueinander um 180 Grad gedrehten Richtungen, in denen die Krümmung maximal bzw. minimal ist, existieren dort genau zwei ausgezeichnete Richtungen, längs deren die Krümmung einer Bahnkurve verschwindet. Später werden wir ein Kriterium erhalten, wann dort Bahnkurven einen Wendepunkt besitzen.

Diese beiden ausgezeichneten Richtungen, in denen die Bahnkrümmung verschwindet, liegen zueinander antisymmetrisch bezüglich des Gradienten

der Potentialfunktion. Wegen (III;88), genauer: da der Zähler des zweiten Terms in dieser Krümmungsformel als inneres Produkt aufzufassen ist, können wir Folgendes formulieren.

Folgerung 4: Bahnen des Eingeschränkten Dreikörperproblems sind

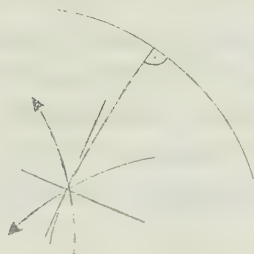


Abb. 11'

zueinander lokal antisymmetrisch bezüglich des Gradienten der Potentialfunktion (woraus dann übrigens auch das Ergebnis der Folgerung 2 folgt, daß die Krümmungsradien der beiden Bahnen, von denen die eine in Richtung des positiven Gradienten der Potentialfunktion von der HILLSchen Grenzkurve wegführt, die andere in Richtung des negativen Gradienten

auf diese Nullgeschwindigkeitskurve hinführt, beide gleich und beide Bahnen rechtsgekrümmt sind).

Auf Grund der Bezeichnung (III;84) für die Krümmung einer Bahnkurve des Eingeschränkten Dreikörperproblems können wir noch folgenden leicht zu beweisenden Satz formulieren:

Satz: Liegt eine Bahn in unmittelbarer Nähe der zugehörigen HILLSchen Grenzkurve und gibt φ ihre Geschwindigkeitsrichtung zum positiven Gradienten der Potentialfunktion an, gilt für die Bahnkrümmung dann asymptotisch

$$\tilde{\kappa} \approx +\infty \quad \text{für} \quad 0 < \varphi < \pi$$

$$\tilde{\kappa} \approx -\infty \quad \text{für} \quad \pi < \varphi < 2\pi.$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Bahnkrümmungsformel (III;84) unter Berücksichtigung, daß der Nenner des zweiten Terms von höherer Ordnung (Exponent in $3/2$) gegen Null geht als der Nenner des ersten Terms (Exponent in $1/2$), falls die Bahn sich ihrer HILLSchen Grenzkurve nähert.

Definition: Wir nennen ein Gebiet HILLSch bezüglich der HILLSchen Grenzkurve H_0 , wenn in jedem Punkt dieses Gebietes für Bahnen des

Eingeschränkten Dreikörperproblems, die H_0 zur HILLschen Nullgeschwindigkeitskurve haben, sowohl positive als auch negative Krümmungen möglich sind. Das größte mögliche Gebiet nennen wir $\mathcal{L}_0(H_0)$ oder auch einfach $\mathcal{L}_0$.

Nach Folgerung 1 gehören die fünf Librationszentren keinem HILLschen Gebiet an und können offenbar höchstens Randpunkte von HILLschen Gebieten sein. Falls die HILLschen Gebiete noch andere Berandungen haben, müssen diese offenbar im "erlaubten Gebiet" liegen, weiter muß sich die Berandung noch aus weiteren Kurven zusammensetzen. Denn für große $x^2 + y^2$ gilt asymptotisch ($\omega = 1$) nach (I.19)

$$\Omega(x, y) \approx \frac{1}{2} (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} R^2$$

und damit

$$\Omega_x^2(x, y) + \Omega_y^2(x, y) \approx x^2 + y^2 = R^2.$$

Hiermit erhalten wir aber für die Bahnkrümmung nach (III;89) asymptotisch

$$\tilde{K} \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{R^2}{2}}} \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R^2}}{\frac{1}{2} R^2} = \frac{2}{R} \pm \frac{1}{R} \geq \frac{1}{R} > 0.$$

Wir kommen zu der

Folgerung 5: Bahnen die zu einer HILLschen Grenzkurve H_0 gehören, können außerhalb eines hinreichend großen Kreises um den Koordinatenursprung des rotierenden Koordinatensystems nur noch rechtsgekrümmt sein. Der Krümmungsradius liegt dann etwa zwischen R und $\frac{R}{2}$.

Möglich erscheint, daß so ein HILLsches Gebiet $\mathcal{L}_0$ auch noch begrenzt sein kann durch Kurven, die in unmittelbarer Nähe des Zentrums eines der beiden Hauptkörper liegen. Eine genauere Untersuchung dagegen zeigt, daß in der Nähe eines der beiden Hauptkörper für die Bahnkrümmung eines Probekörpers stets beide Vorzeichen möglich sind: be-

findet sich nämlich ein Probekörper auf einer Bahn, der zur HILLschen Grenzkurve H_0 gehört, sehr nahe bei einem der beiden Hauptkörper, etwa der "Sonne", so gilt dort nach (II, 3) asymptotisch für die Potentialfunktion $\Omega(x, y) \approx \frac{2m}{r}$ und damit nach (II, 4), (II, 5)

$$\Omega_x \approx - \frac{2m}{r^2} \frac{x + \mu}{r} = - \frac{2m}{r^3} (x + \mu)$$

und

$$\Omega_y \approx - \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = - \frac{2m}{r^3} y$$

und damit

$$\Omega_x^2 + \Omega_y^2 \approx \frac{4m^2}{r^6} ((x + \mu)^2 + y^2) = \frac{4m^2}{r^4}.$$

Wir erhalten also nach (III;89) für kleine r asymptotisch für die Bahnkrümmung

$$\tilde{\kappa} \approx \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2m}} \pm \frac{1}{2} \frac{2m}{r^2} \cdot \frac{r}{2m} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \sqrt{r} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{r},$$

$$0 < r \ll 1.$$

Damit ist also für kleine r der zweite Term dieser Gleichung ausschlaggebend. Dies führt zur

Folgerung 6: Bei hinreichender Annäherung der Bahn eines Probekörpers an einen der beiden Hauptkörper unterscheidet sich der Bahnkrümmungsradius hinreichend wenig von Null. Hierbei ist sowohl Rechts- als auch Linkskrümmung möglich.

IV. Lösungen der verstümmelten Differentialgleichungen.

§ 14. Herleitung der verstümmelten Differentialgleichungen.

Für den Bewegungsablauf eines Probekörpers hatten wir in (I. 20) und (I. 21) das Differentialgleichungssystem

$$(IV. 1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y \end{aligned}$$

gefunden, wobei die Potentialfunktion durch (I. 19), (I. 21) und (I. 23) durch

$$(IV. 2) \quad \Omega(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2} + U(x, y) \quad \text{mit} \quad U(x, y) = \frac{1 - \mu}{\sqrt{y^2 + (x + \mu)^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{y^2 + (x - 1 + \mu)^2}}$$

gegeben war. Ist nun (x_0, y_0) ein Punkt auf einer nicht ausgearteten HILL'schen Grenzkurve (ausgeartete HILL'sche Grenzkurven sind die fünf singular liegenden LAGRANGE'schen Librationszentren) und (x, y) ein benachbarter, im "erlaubten" Gebiet liegender Punkt, so läßt sich die Potentialfunktion, da sie reellanalytisch in den Variablen x und y ist, nach $(x - x_0)$ und $(y - y_0)$ entwickeln und wir erhalten nach dem Mittelwertsatz für das Differentialgleichungssystem

$$(IV. 1) \quad \begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x(x_0, y_0) + (x - x_0) \Omega_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}) + (y - y_0) \Omega_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y(x_0, y_0) + (y - y_0) \Omega_{yx}(\hat{x}, \hat{y}) + (x - x_0) \Omega_{xy}(\hat{x}, \hat{y}), \end{aligned}$$

wobei $(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $(\hat{x}, \hat{y})$ zwei Punkte der Verbindungsgeraden zwischen (x_0, y_0) und (x, y) sind. Um die Stellen (x_0, y_0) , (x, y) und (x, y) nicht dauernd mitschleppen zu müssen, vereinbaren wir noch, daß die Symbole " $\circ$ ", " $\sim$ " und " $\wedge$ " an das Symbol Ω der Potentialfunktion angebracht werden soll und erhalten damit für die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 \text{(IV.1)} \quad \ddot{x} - 2\dot{y} &= \ddot{\Omega}_x + (x - x_0) \ddot{\Omega}_{xx} + (y - y_0) \ddot{\Omega}_{xy} \\
 \ddot{y} + 2\dot{x} &= \ddot{\Omega}_y + (x - x_0) \ddot{\Omega}_{yx} + (y - y_0) \ddot{\Omega}_{yy}.
 \end{aligned}$$

Im vorangehenden Paragraphen hatte sich gezeigt, daß die Bahnen eines Probekörpers des Eingeschränkten Dreikörperproblems lokal antisymmetrisch bezüglich des Gradienten der Potentialfunktion sind. Indem wir diesem Verhalten Rechnung tragen, führen wir ein Koordinationssystem ein, dessen Abszisse in Richtung des Gradienten der Potentialfunktion und dessen Ordinate senkrecht hierzu in mathematisch positivem Sinn weist, wobei der neue Koordinatenursprung im Punkt (x_0, y_0)

liegt. Die neuen Koordinaten sind bekanntlich gegeben durch die lineare Transformation

$$\text{(IV.3)} \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ mit } \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Omega}_x}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} & \frac{\dot{\Omega}_y}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} \\ -\frac{\dot{\Omega}_y}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} & \frac{\dot{\Omega}_x}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} \end{pmatrix}$$

Die zu $\mathcal{A}$ inverse Matrix $\mathcal{A}^{-1}$ ist gegeben zu

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Omega}_x}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} & -\frac{\dot{\Omega}_y}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} \\ \frac{\dot{\Omega}_y}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} & \frac{\dot{\Omega}_x}{\sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}} \end{pmatrix}$$

Weil nun

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix}$$

ist, erhalten wir wegen $\begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \alpha^{-1} \begin{pmatrix} -\dot{\eta} \\ \dot{\xi} \end{pmatrix}$ aus (V.1)

das neue Differentialgleichungssystem

$$(IV.4) \quad \begin{pmatrix} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \end{pmatrix} + \alpha \mathcal{L} \alpha^{-1} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mathcal{L} = \begin{pmatrix} \tilde{\Omega}_{xx} & \tilde{\Omega}_{xy} \\ \tilde{\Omega}_{yx} & \tilde{\Omega}_{yy} \end{pmatrix}$$

Bei der Herleitung der Gleichungen der Librationsbahnen ging CHARLIER davon aus, daß die Koordinatenwerte so klein sein sollten, daß die Terme mindestens zweiter Ordnung in den abhängigen Variablen vernachlässigt werden können. Man erhielt dadurch ein System linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung sich zusätzlich dadurch vereinfachte, daß einmal die partiellen Ableitungen erster Ordnung ja nach (II.4') beide gleichzeitig in den LAGRANGESchen Librationszentren verschwanden und das System dadurch homogen wurde. Zum anderen waren die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung für die Dreieckslibrationszentren durch (II.11) durch feste Werte gegeben; für die kollinearen Librationszentren dagegen verschwanden nach (II.14) die gemischten Ableitungen und die verbleibenden anderen beiden Ableitungen zweiter Ordnung hatten nach (II.16) und (II.14) zwei voneinander verschiedene Vorzeichen. Dieses homogene, linearisierte Differentialgleichungssystem, das man hier auch dadurch erhält, daß man in (IV.1') für die Punkte $(\tilde{x}, \tilde{y})$ und $(\hat{x}, \hat{y})$ den Punkt (x_0, y_0) nimmt und für die partiellen Ableitungen erster Ordnung Null setzt, ließ sich allgemein elementar lösen. Anders steht es jetzt in unserem hiesigen Fall;

da der Punkt (x_0, y_0) ja außerhalb eines LAGRANGESchen Librationszentrums liegen soll und damit stets wenigstens eine partielle Ableitung erster Ordnung von Null verschieden ist, kann dieses Differentialgleichungssystem nicht mehr homogen sein. Da man weiter über die Größe der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung allgemein keine Aussage treffen kann, ist eine allgemeine Antwort auf die Frage nach dem qualitativen Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems (IV.4) kaum zu erwarten. Darum wollen wir die abhängigen Variablen ξ und η in (IV.4) als so klein annehmen, daß auch noch die linearen Terme in ξ und η vernachlässigt werden-

den können; wir erhalten dadurch das verstümmelte Differentialgleichungssystem

$$(IV. 5) \quad \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} = \bar{A} \quad \text{mit} \quad \bar{A} = \sqrt{\dot{\Omega}_x^2 + \dot{\Omega}_y^2}$$
$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} = 0 \quad .$$

A priori ist kaum zu erwarten, daß aus den Lösungen eines derart verstümmelten Differentialgleichungssystems (IV. 5) noch brauchbare Ergebnisse darüber gefunden werden können, wie sich die Bahn eines Probekörpers des Eingeschränkten Dreikörperproblems in der Nähe der ihr zugehörigen HILLschen Grenzkurve verhält. Dennoch wollen wir in diesem Kapitel die Theorie entwickeln. In den folgenden Kapiteln wird sich dann zeigen, daß die hier gewonnenen Ergebnisse vollkommen übereinstimmen mit den dortigen und damit der Wirklichkeit entsprechen.

§ 15. Einmalige Integration der verstümmelten Differentialgleichungen
und die Krümmungsformel.

In diesem Paragraphen wollen wir uns zum Ziel setzen, auf möglichst einfache Weise die Theorie zu entwickeln, ohne von der allgemeinen Lösung von (IV. 5) auszugehen. Der Gang dieses elementaren Weges soll dazu dienen, an späterer Stelle beim Begehen schwierigerer Schritte den Verlauf der dort anstehenden Probleme leichter zu durchblicken.

Da hier $\ddot{A}$ konstant ist, läßt sich das Differentialgleichungssystem leicht rein formal einmal integrieren: es ist

$$(IV. 6) \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\eta + \ddot{A}t + c_1 \\ \dot{\eta} &= c_2 - 2\dot{\xi} \end{aligned}$$

wobei c_1 und c_2 die Integrationskonstanten sind, über die wir zu gegebener Zeit weiter verfügen wollen. Ähnlich einfach erhalten wir in der hierfür üblichen Weise das JACOBIsche Integral, indem wir die erste Gleichung von (IV. 5) mit $\dot{\xi}$, die zweite mit $\dot{\eta}$ multiplizieren, beide addieren und anschließend integrieren zu:

$$(IV. 7) \quad \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\ddot{A}\xi + c_3, \text{ wobei } c_3 = 0 \text{ ist,}$$

wenn wir uns aus der gesamten Schar diejenigen Bahnen aussondern, die die η -Achse zur HILLschen Grenzkurve haben. Wollen wir von diesen Lösungsbahnen nun nur diese betrachten, die für $t = 0$ die Abszisse senkrecht schneiden, so erhalten wir aus (IV. 6) und (IV. 7)

$$(IV. 8) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \pm \sqrt{2\ddot{A}\xi(0) + 2\dot{\xi}(0)}.$$

Ist dagegen für $t = 0$ $\xi(0) = \eta(0) = \dot{\xi}(0) = \dot{\eta}(0) = 0$, so gilt

$$(IV. 9) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = 0$$

und wir erhalten

$$(IV. 9') \quad \begin{aligned} \ddot{\xi} &= 2\eta + \ddot{A}t \\ \dot{\eta} &= -2\dot{\xi} \end{aligned}$$

Nun wollen wir aus (IV.5) und (IV.7) die Formel für die Bahnkrümmung herleiten. Es ist

$$(IV.10) \quad \kappa = \frac{\dot{\eta} \ddot{\xi} - \xi \ddot{\eta}}{[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2]^{3/2}} = \frac{4\ddot{\xi} + \ddot{\eta}}{[2\ddot{\xi}]^{3/2}} = \frac{4\ddot{\xi} + \ddot{\eta}}{2\sqrt{2}\sqrt{\ddot{\xi}}[\ddot{\xi}]^{3/2}}.$$

Fragen wir nun nach dem geometrischen Ort der Punkte, in dem der Zähler von (IV.10) stets verschwindet, der aber vermöge (IV.8) und der ersten Gleichung von (IV.6) mit unserer obigen Bahnschar verknüpft ist. Für ihn gilt zunächst

$$(IV.11) \quad \dot{y} = -4x.$$

Setzen wir diese Beziehung in das JACOBIsche Integral (IV.7) ein, so erhalten wir

$$\dot{x}^2 + 16x^2 = 2\ddot{x},$$

oder aber, wenn wir für $t = 0 : x(0) = 0$ vorschreiben

$$(IV.12) \quad \dot{x} = \pm \sqrt{2\ddot{x} - 16x^2}$$

$$x(0) = 0$$

woraus sofort als Lösung

$$(IV.13) \quad x(t) = \frac{\ddot{x}}{16} [1 - \cos 4t] \quad \text{und hieraus} \quad \dot{x}(t) = \frac{\ddot{x}}{4} \sin 4t$$

folgt. Dieses Ergebnis, in die erste Gleichung von (IV.6) unter Berücksichtigung von (V.8) eingesetzt, liefert uns, zusammen mit (IV.13) die Gleichungen der Kurve

$$(IV.14) \quad x(t) = \frac{\ddot{x}}{16} [1 - \cos 4t], \quad y(t) = \frac{\ddot{x}}{8} [\sin 4t - 4t],$$

wobei es sich hier nicht um eine Bahn handelt, sondern, wie sich an späterer Stelle deutlicher herausstellt, um den geometrischen Ort aller Punkte, in denen eine Teilschar der zu (IV.6) mit (IV.8) passenden Bahnkurven Wendepunkte besitzen.

Für die Bahnkrümmung (IV.10) war

$$\tilde{\kappa} = \frac{4\dot{\xi} + \dot{\eta}}{2\sqrt{2}\sqrt{A}[\xi]^{3/2}}.$$

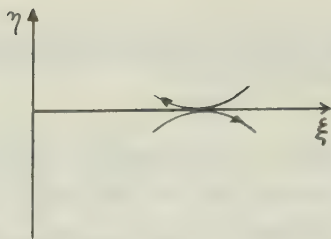


Abb. 12

Betrachten wir nun beide möglichen Bahnkurven, die zu einem Zeitpunkt t_0 die Abszisse

in P_0 berühren, womit also $\dot{\eta}(t_0) = 0$ ist,
so erhalten wir für ^{das/}JACOBIsche Integral

$$\dot{\xi}^2(t_0) + \dot{\eta}^2(t_0) = \dot{\xi}^2(t_0) = 2A\xi(t_0).$$

Damit gilt aber für die Krümmung

$$(IV.15) \quad \tilde{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi(t_0)}}$$

und kommen zu dem Ergebnis, daß in beiden Fällen die Bahnkrümmung mit gleichem Krümmungsradius positiv ist, es sich also jeweils um zueinander lokal antisymmetrisch gleich starke Rechtskrümmungen handelt (Abb.).

Bemerkenswert ist auch noch, daß man hier - wie in den beiden Fällen, daß die Bahnkurve die Abszisse senkrecht trifft (zweite Gleichung von (IV.9) und (IV.10)) - die Krümmung allein als Funktion des Abszissenwertes ausdrücken kann.

Gehen wir in unserer Betrachtung zur Grenzkurve über, zur Bahn also, die für $t = t_0$ eine Umkehrspitze im Ursprung unseres Koordinatensystems hat, für die also $\xi(t_0) = \eta(t_0) = \dot{\xi}(t_0) = \dot{\eta}(t_0) = 0$ ist.

Wie schon an früherer Stelle § 6, (II.42) bemerkt, mündet die Bahn tangential zur Abszisse in den Koordinatenursprung ein. Es liegt nun nahe, Formel (IV.15) für den Grenzwert der Bahnkrümmung zu verwenden und man erhielte damit asymptotisch

$$(IV.16) \quad \tilde{\kappa} \approx \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

die Krümmung ist unendlich von der Ordnung $\sqrt{\xi}$, versehen mit dem Faktor $\sqrt{\frac{2}{A}}$. Eine genauere Untersuchung ergibt allerdings nur die Richtigkeit des ersten Teils der Behauptung, der zweite Teil erweist sich um einen Faktor $\frac{1}{2}$ als falsch. Um dies einzusehen, müssen wir auf Formel (IV.10) zurückgreifen, die für den allgemeinen Fall gültig ist. Aus ihr hatten wir oben vor dem Grenzübergang den Term

$$\frac{A \dot{\eta}}{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2)^{3/2}}$$

weglassen können, da wir Bahnkurvenstücke betrachte-

ten, die für $t = t_0$ die Abszisse in P_0 berührten, also $\dot{\eta}(t_0) = 0$

war. Diese verkürzte Formel führte zu (IV.15) und schließlich zu (IV.16). In dem hier nun vorliegenden Grenzfall gehen mit dem gleichzeitigen Verschwinden der Bahn und Geschwindigkeitskoordinaten sowohl Zähler als auch Nenner von (IV.10) gegen Null; wir dürfen daher nicht

a priori den Ausdruck $\frac{\dot{\eta} A}{[\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2]^{3/2}}$ weglassen, sondern müssen

das in diesem Ausdruck vorkommende $\dot{\eta}$ nun durch die zweite Gleichung von (IV.9') ersetzen und erhalten dann damit aus (IV.10) die wirkliche Bahnkrümmung asymptotisch zu

$$(IV.17) \quad \tilde{\kappa} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Eine Korrektur des entsprechenden Ergebnisses im letzten Paragraphen des Kapitels III ist dort nicht möglich, da es dort nicht gelingt, die geeigneten Anfangswerte der Bahnkurve durch einen Kunstgriff festzulegen.

§ 16. Die Schar der Nullkrümmungskurven.

Nach Paragraph 13 gibt es in der Nähe der HILLschen Grenzkurve H_0 ein HILLsches Gebiet $\mathcal{H}_0$, innerhalb dessen zu jedem Punkt zwei ausgezeichnete Richtungen existieren, in denen eine zu H_0 gehörende Bahnkurve die Krümmung Null aufweist. Wir setzen uns nun zum Ziel, die Schar der Bahnkurven zu bestimmen, die durch ihre eigene Tangentenrichtung in jedem Punkt von $\mathcal{H}_0$ die Richtung angibt, in der eine Lösungsbahn unseres verstümmelten Differentialgleichungssystems (IV. 5) einen Wendepunkt bzw. die Krümmung Null haben muß.

Wenn nun φ die Tangentenrichtung, gemessen von der positiven Normalen aus, und v die Bahngeschwindigkeit bezeichnet, so gilt also

$$\dot{\xi} = v \cos \varphi = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} \cos \varphi$$

$$\dot{\eta} = v \sin \varphi = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} \sin \varphi$$

oder aber, wenn wir v durch das JACOBIsche Integral (IV. 7) ausdrücken

$$(IV. 18) \quad \dot{\xi} = \sqrt{2A\xi} \cdot \cos \varphi \text{ und } \dot{\eta} = \sqrt{2A\xi} \cdot \sin \varphi.$$

Hiermit gilt natürlich für den Winkel φ die Beziehung

$$(IV. 19) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{\eta}}{\dot{\xi}} = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta'(\xi) \text{ mit } \sin \varphi = \frac{\eta'}{\sqrt{1 + \eta'^2}}$$

Soll in einem Punkt die Bahnkrümmung verschwinden, so muß nach (IV. 10)

$$(IV. 11) \quad \dot{\eta} = -4\xi$$

sein. Da sich der Probekörper stets nur in dem für ihn erlaubten Gebiet aufhalten kann, wo die Abszisse nicht negativ ist, erhalten wir zunächst als Teilergebnis, daß höchstens für negative Ordinatengeschwindigkeit $\dot{\eta}$ Wendepunkte der Lösungsbahnen auftreten können. Zusan.-

men mit (IV.18) und (IV.19) ergibt sich für die gesuchte Bahnschar die Beziehung

$$\eta' \sqrt{2 \mathring{A} \mathring{\xi}} + 4 \mathring{\xi} \sqrt{1 + \eta'^2} = 0$$

und daraus

$$(IV.20) \quad \eta' = \pm \sqrt{\frac{8 \mathring{\xi}}{\mathring{A} - 8 \mathring{\xi}}}.$$

Wie zu erwarten war, handelt es sich um zwei Kurvenscharen, wobei der Anstieg aller Bahnkurven der ersten Schar stets positiv, der der zweiten Schar dagegen stets negativ bleibt. In Hinblick darauf, daß – wie oben bemerkt – $\dot{\eta} < 0$ ist, falls ein Wendepunkt vorliegt, sind die Bahnkurven der ersten Schar α den Bahnabschnitten zugeordnet, auf denen der Probekörper sich der HILLschen Grenzkurve H_0 nähernd einen Wendepunkt erleidet ($\dot{\xi} < 0$), während die der zweiten Schar $\mathcal{L}$ zu den Wendepunkten gehören, die der Probekörper aus Richtung H_0 kommend mit $\dot{\xi} > 0$ durchläuft.

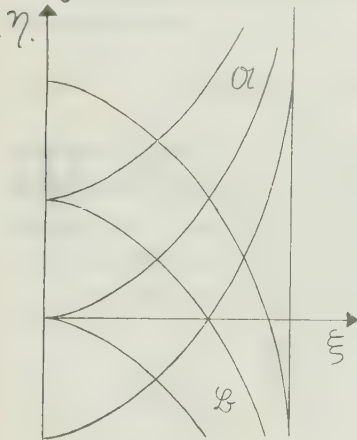


Abb.13

Da die Kurven von α und $\mathcal{L}$ zueinander bezüglich Parallelen zur Abszisse symmetrisch verlaufen und sich in den einzelnen Scharen selbst zudem nur um Integrationskonstanten voneinander unterscheiden, genügt es die Schar α zu untersuchen.

Durch die mit dem positiven Vorzeichen ausgestattete Differentialgleichung (IV.20) wird ein Richtungsfeld (auf die die Kurven α passen)

gegeben, das für das offene Intervall $]0, \frac{A}{8}[$ definiert ist und deren

Isoklinen parallel zur η -Achse sind und zwischen H_0 und $\xi = \frac{A}{8}$ liegen. Das HILLSche Gebiet ξ_0 ist hier also ein Streifen, das als Ufer die Geraden H_0 und eine zu ihr Parallele im Abstand $\frac{A}{8}$ hat.

Da η' in $]0, \frac{A}{8}[$ stets positiv ist, sind die Lösungen von (IV. 20) streng monoton wachsend und sind im übrigen gegeben durch

$$\eta(\tau) = \frac{A}{8} [\tau - \sin \tau \cos \tau] + c \quad \xi(\tau) = \frac{A}{16} [1 - \cos 2\tau] ,$$

(IV. 21) oder aber durch

$$\eta(\xi) = \frac{A}{8} \left[\arcsin \sqrt{\frac{8\xi}{A}} - \frac{1}{A} \sqrt{8A\xi - 64\xi^2} \right] + c$$

Weil $\lim_{\xi \rightarrow 0} \eta'(\xi) = 0$ existiert, können wir $\eta'(0) = 0$ definieren.

Für gegen $\frac{A}{8}$ wachsendes ξ erhalten wir dagegen den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$.

Bilden wir vermittels (IV. 20) nun noch die zweite Ableitung

$$(IV. 22) \quad \eta''(\xi) = \frac{\sqrt{2} A}{\sqrt{\xi}} [A - 8\xi]^{-\frac{3}{2}}, \quad \xi \in]0, \frac{A}{8}[,$$

so erkennen wir, daß η im vorgegebenen Intervall streng konvex ist. Mit (IV. 22) erhalten wir aber sofort für die Kurven die Krümmung

$$(IV. 23) \quad \kappa = \frac{\eta''(\xi)}{[1 + (\eta'(\xi))^2]^{3/2}} = \sqrt{\frac{2}{A}} \frac{1}{\sqrt{\xi}} .$$

In $\xi = 0$ ist somit asymptotisch

$$(IV. 24) \quad \kappa \approx \sqrt{\frac{2}{A}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} .$$

also unendlich von der Ordnung $\sqrt{f}$, versehen mit dem Faktor

$$(IV. 24') \quad 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{A}}.$$

Von hier nimmt die Krümmung mit wachsendem f streng monoton ab,

bis sie in $f = \frac{A}{8}$ den Wert $\tilde{\kappa}(\frac{A}{8}) = \frac{4}{A}$ erreicht.

Wegen $\lim_{f \rightarrow \frac{A}{8}} \eta(f) = \frac{A}{8} \arcsin 1 = \frac{A}{16} \pi$ ist die Gesamtschwan-

kung einer Lösungskurve von (IV. 20) schließlich $\frac{A}{16} \pi$.

Zum Schluß nun noch eine Eigenschaft der beiden Ufer des HILL-
schen Grenzstreifens $\mathcal{L}_0$, die den Diskriminantenort der Differential-
gleichung (IV. 20) ausmachen. Während H_0 offenbar der geometrische
Ort der Spitzen darstellt, ist das andere Ufer als singuläre Lösung von
(IV. 20) zugleich deren Einhüllende. Dieses andere Ufer läßt sich in
parametrischer Form durch

$$(IV. 25) \quad f(t) = \frac{A}{8}, \quad \eta(t) = -\frac{A}{2} t$$

darstellen. Deuten wir hier t wieder als Zeit, so ist offenbar (IV. 25)
die partikuläre Lösung des verstümmelten Differentialgleichungssy-
stems (IV. 5), deren Krümmung stets Null ist.

§ 17. Die Lösung des verstümmelten Differentialgleichungssystems.

Da es sich bei (IV. 5) um ein inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten handelt, können wir sofort eine allgemeine Lösung angeben. Geben wir noch die Anfangsbedingungen

$$(IV. 26) \quad \begin{aligned} \xi(0) &= \varphi^2 & \dot{\xi}(0) &= 0 \\ \eta(0) &= 0 & \dot{\eta}(0) &= \pm \sqrt{2A} \varphi^2 = \sqrt{2A} \cdot \varphi, \quad \varphi \leq 0 \end{aligned}$$

vor, so hat das gestellte Problem die einparametrische Bahnkurvenschar

$$(IV. 27) \quad \begin{aligned} \xi(t) &= \varphi^2 + \left(\frac{A}{4} + \sqrt{\frac{A}{2}} \varphi\right) [1 - \cos 2t] \\ \eta(t) &= \left(\frac{A}{4} + \sqrt{\frac{A}{2}} \varphi\right) \sin 2t - \frac{A}{2} t \end{aligned}$$

als Lösung. Wir erhalten als Bahnkurven eine Schar von Zykloidenkurven der Periode π , die trivialerweise die Abszisse als Achse globaler Antisymmetrie besitzt. Ihre Ableitungen lauten:

$$(IV. 28) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \frac{A}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi\right) \sin 2t & \dot{\eta}(t) &= \frac{A}{2} \left\{ \left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi\right) \cos 2t - 1 \right\} \\ \ddot{\xi}(t) &= A \left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi\right) \cos 2t & \ddot{\eta}(t) &= -A \left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi\right) \sin 2t \end{aligned}$$

Wie leicht zu ersehen ist, trifft nur eine Bahnkurve der Bahnschar (IV. 27) ihre HILLsche Grenzkurve, die hier mit der Ordinate zusammenfällt; es ist die Kurve c mit dem Parameter $\varphi = 0$. Sie trennt die gesamte Schar in zwei Teilscharen und zwar

1. in die Bahnschar τ mit dem Parameter $\varphi > 0$ und
2. in die Bahnschar ν mit dem Parameter $\varphi < 0$.
3. Die Bahnkurve c , $\varphi = 0$ kann als Grenze beider angesehen werden.

Auf die Frage, wie sich die Scharen τ und ν von einander noch unterscheiden, sehen wir uns nach der Anzahl der Schnittpunkte mit der

Abszisse um. Hierzu setzen wir die zweite Gleichung in (IV. 27) Null und erhalten wegen $\ddot{A} \neq 0$ als Kriterium

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2}{A}} \varphi\right) \sin 2t - t = 0.$$

Als Ergebnis erhalten wir daraus

1. für die Bahnschar $\mathfrak{c}$ ($\varphi > 0$) genau drei Schnittpunkte mit der ξ -Achse;
2. für die Bahnschar $\mathfrak{d}$ ($\varphi < 0$) genau einen Schnittpunkt mit der ξ -Achse;
3. für die Grenzkurve $\mathfrak{c}$ ($\varphi = 0$) genau einen Schnittpunkt, der hier auf der HILLschen Grenzkurve liegt.

Weitere Unterschiede erkennen wir aus dem Krümmungsverhalten der Bahnscharen. Für die Krümmungen erhalten wir gemäß (IV. 28) sofort

$$(IV. 29) \quad \tilde{\kappa}(t; \varphi) = \frac{4}{A} \frac{(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi) [(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi) - \cos 2t]}{[(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi)^2 - 2(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi) \cos 2t + 1]^{3/2}}.$$

Da in dieser Gleichung der Nenner für $\varphi \neq 0$ stets positiv ist (für $\varphi = 0$ verschwindet er nur, wenn gleichzeitig $t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ ist), hängt das Vorzeichen von (IV. 29) und damit der Krümmungssinn der Bahnkurve allein vom Zähler ab. Dieser ist, wie man sieht, für $\varphi > 0$ stets positiv, (verschwindet für $\varphi = 0$ nur wenn gleichzeitig $t = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ist),

für $\varphi : -\sqrt{\frac{A}{8}} < \varphi < 0$ existiert dagegen stets eine Umgebung um $t = 0$, in der der Zähler und damit (IV. 29) negativ ist. Allerdings bleibt

für so ein $\varphi_1 : -\sqrt{\frac{A}{8}} < \varphi_1 < 0$ die Krümmung $\tilde{\kappa}(t; \varphi_1)$ nicht für alle t negativ; darum existiert, da $\tilde{\kappa}(t; \varphi)$ stetig in den Argumenten t und φ ist, ein erstes $t = \tilde{t}(\varphi_1)$, in dem die Krümmung

$\tilde{\kappa}(\tilde{t}, \varphi_1) = 0$ ist. Aus Gründen der Antisymmetrie ist dann hier auch

$$\tilde{\kappa}(-\tilde{t}, \varphi_1) = 0.$$

Wir können uns nun noch nach dem geometrischen Ort der Punkte umsehen,

in denen $\mathcal{K}(t, \varphi) = 0$ ist, so eine Bahnkurve der Schar $\mathcal{V}$ also einen Wendepunkt aufweist. Gleichbedeutend damit ist offenbar, daß der Zähler von (IV. 29)

$$(IV. 30) \quad \left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \cdot \varphi\right) \left[\left(1 + \sqrt{\frac{8}{A}} \varphi\right) - \cos 2t\right] = 0$$

ist.

Wenn in diesem Produkt der erste Faktor verschwindet, so führt dies direkt zu dem zum Schluß des vorigen Paragraphen betrachteten Fall, in dem das eine Ufer des HILL'schen Streifens, nämlich das, welches im "erlaubten Gebiet" liegt und zugleich Einhüllende der Schar der Nullkrümmungskurven ist, Spur der partikulären Lösung (IV. 25) ist. Da es sich um eine Gerade handelt, ist ihre Krümmung trivialerweise stets Null. Verschwindet dagegen der zweite Faktor von (IV. 30), so drückt diese Beziehung des jeweiligen (negativen) Scharparameters φ mit dem Wert des zugehörigen Bahnkurvenparameters t aus, daß die Krümmung der Bahnkurve verschwindet, diese dort also einen Wendepunkt besitzt. Diese neue, aus Gleichung (IV. 30) und den beiden Gleichungen (IV. 27) entstehende Kurve nennen wir darum die "Wendekurve" der Teilschar $\mathcal{V}$. Setzen wir die Beziehung

$$(IV. 31) \quad \varphi = - \sqrt{\frac{A}{8}} \left[1 - \cos 2t\right]$$

in die erste der beiden Gleichungen (IV. 27) ein, so erhalten wir

$$(IV. 32) \quad x(t) = \frac{A}{8} \sin^2 2t,$$

setzen wir (IV. 31) dagegen in die zweite der Gleichungen (IV. 27) ein, so ergibt sich alsbald

$$(IV. 32') \quad y(t) = \frac{A}{8} \left[\sin 4t - 4t\right].$$

Für die Wendekurve erhalten wir offenbar wieder eine Zykloide, die mit (IV. 14) übereinstimmt.

Daraus ergibt sich aber sofort für deren Ableitungen

$$(IV.33) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{A}}{4} \sin 4t & \dot{y} &= \frac{\dot{A}}{2} [\cos 4t - 1] = -8x \\ \ddot{x} &= \dot{A} \cos 4t & \ddot{y} &= -2 \dot{A} \sin 4t \end{aligned}$$

und wir bekommen daraus

$$(IV.34) \quad \dot{y}\ddot{x} - \ddot{y}\dot{x} = \frac{\dot{A}^2}{2} [1 - \cos 4t] = 8 \dot{A} x(t).$$

In üblicher Weise erhalten wir aus (IV.33)

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{\dot{A}^2}{16} [1 - \cos 4t] (5 - 3 \cos 4t) = \dot{A} x(t) (5 - 3 \cos 4t)$$

und daraus und aus (IV.34) für die Krümmung asymptotisch

$$(IV.35) \quad \kappa \approx 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\dot{A}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

falls x gegen Null geht.

Man beachte, daß die Wendekurve die Periode $\frac{\pi}{2}$ hat, während die Lösungen des Differentialgleichungssystems (IV.5) die Periode π besitzen. Dies ist aber nur ein scheinbarer Widerspruch; denn für

dem Betrage nach große ϱ , $\varrho < 0$ — genauer: für $\varrho < -\sqrt{\frac{\dot{A}}{8}}$ —

hat eine für $t = 0$ die Abszisse senkrecht schneidende Bahnkurve — wie oben bemerkt — dort ja wieder eine positive Krümmung; es handelt

sich also einfach um eine um $t_0 = \frac{\dot{A}}{4} \pi$ verschobene Bahnkurve un-

serer Schar $\mathcal{V}$.

Wir können – auch im Hinblick auf die Kenntnisse über den Verlauf von Zykloiden – zusammenfassen:

(IV.36) 1. Die Bahnkurven der Schar $\mathcal{C}$ sind bezüglich des Durchlaufsinns stets positiv gekrümmt und besitzen in Richtung auf den Koordinatenursprung hin lange, enge und geschlossene Schleifen. Für kleiner werdende $\varrho > 0$ verringert sich der Abstand des Schleifenscheitels (in dem sich für $t = 0$ der Probekörper befindet) zum Koordinatenursprung, die Schleifen werden dünner und kürzer, bis sie für $\varrho \searrow 0$ mit dem Koordinatenursprung zusammenfallen. Die Scheitelkrümmung geht dabei gegen $+\infty$.

2. Die Bahnen der Schar $\mathcal{D}$ bilden stets nichtgeschlossene Schleifen aus, die ebenfalls einen Scheitel in Richtung des Koordinatenursprungs besitzen, der für dem Betrage nach nicht zu große $\varrho < 0$

(genauer: – $\sqrt{\frac{R}{8}} < \varrho < 0$) in bezug auf den Durchlauf-

sinn des Probekörpers negativ gekrümmt ist, während weiter außen die Bahnen wieder eine positive Krümmung aufweisen. Wird nun $\varrho < 0$ dem Betrag nach immer kleiner, so werden die Schleifenteile negativer Krümmung immer enger und kürzer um für $\varrho \nearrow 0$ in den Koordinatenursprung zu fallen, wobei die Wendepunkte der Bahnkurven sich in erster Näherung auf einer NEILschen Parabel dem Ursprung nähern und die Scheitelkrümmung gegen $-\infty$ geht.

V. Das nicht verstümmelte Differentialgleichungssystem

§ 18 Das Lösungsverhalten der Bahnen, deren HILLSche Grenzkurve in unmittelbarer Nähe eines der LAGRANGESchen Librationszentren liegt.

Bei den Untersuchungen des vorigen Kapitels war

$$\dot{A} = \sqrt{\Omega_x^2(x_0, y_0) + \Omega_y^2(x_0, y_0)} > 0$$

vorausgesetzt worden. Diese Bedingung ist in den fünf Librationszentren, in denen ja beide partielle Ableitungen gemeinsam verschwinden, nicht mehr erfüllt. In unmittelbarer Nähe dieser Punkte muß unsere obige Methode versagen; denn die Krümmung unserer HILLSchen Grenzkurven

$$\kappa = - \frac{1}{[\Omega_x^2 + \Omega_y^2]^{3/2}} \cdot \left\{ \Omega_y^2 \Omega_{xx} - 2 \Omega_x \Omega_y \Omega_{xy} + \Omega_x^2 \Omega_{yy} \right\}$$

bleibt dort nicht mehr beschränkt, was sich in unseren obigen Untersuchungen dadurch ausdrücken würde, daß die Ganghöhen der dortigen Zykloiden gegen Null gehen würden. Das ist zwar praktisch auch der Fall (wie auch die CHARLIERSchen Lösungen praktisch nur infinitesimale Lösungen ergeben); dennoch könnteⁿ uns bei diesem ungewollten Grenzübergang Feinheiten verloren gehen, die auf eine andere Art erhalten bleiben könnten. Ein solches Verfahren liefert uns die CHARLIERSche Theorie selbst.

Im ersten Fall soll es sich um ein LAGRANGESches Librationszentrum handeln, das mit den beiden Hauptkörpern ein gleichseitiges Dreieck bildet. Als HILLSche Grenzkurven ergaben sich nach (III;76) infinitesimale Ellipsen und koaxial hierzu für (III;13) die jeweils zwei zu diesen Ellipsen koaxiale (III;36) Librationsellipsen, die jeweils zwei für sich nach (III;14) tantochron durchlaufen werden. Es kommen als Bahnen also nur Epizykloide in Frage, die jeweils nach Anfangsbedingungen und Ort geschlossene Schleifen, offene Schleifen mit Wendepunkte und Spitzen ausbilden können. Solche Spitzen können natürlich nur auf der HILLSchen

Grenzellipse liegen.

Fall 2. Es liegt ein kollineares Librationszentrum vor. Wir berücksichtigen hier die Ergebnisse des Paragraphen 11. Um die charakteristischen Eigenschaften über das Bahnverhalten finden zu können, wollen wir folgende Forderungen treffen:

Forderung 1: Die jeweilige Bahn soll (als allgemeine Lösung des linearisierten Systems (III;2) und somit Superposition beider Bahnscharen) $H_0^{(1)}$ bzw. $H_0^{(2)}$ als HILLsche Grenzkurven und damit c_0 als JACOBIsche Konstante besitzen, mit

$$c_0 < 2 \Omega(x_{L_\nu}, 0) \quad (\nu = 1, 2, 3); \text{ die Scheitel der Hyperbel}$$

liegen also auf der Ordinate.

Forderung 2: Diese Bahn soll zur Zeit $t = 0$ die y -Achse senkrecht schneiden.

Zur zweiten Forderung ist zu bemerken, daß nach allgemeinen Eindeutigkeitssätzen und der Forderung 1 (JACOBI'sches Integral) durch jeden Punkt auf der y -Achse, der in dem bezüglich der JACOBI'schen Konstanten c erlaubten Gebiet liegt, genau eine Bahn mit $\dot{x}(0) > 0$ und genau eine Bahn mit $\dot{x}(0) < 0$ verläuft. Eine Ausnahme kann, wie wir später sehen, nur der Scheitelpunkt P der HILL'schen Grenzhyperbel bilden. Wie wir übrigens erkennen, wurden die Vorbereitungen unserer Analyse bereits oben getroffen.

Wir bezeichnen mit $\mathcal{B}_1$ die Schar der Ellipsenbahnen, die aus dem Librationszentrum hervorquillt und mit Γ_1 (das die JACOBI'schen Konstanten c_0 besitzt) ihren Abschluß findet. Entsprechend soll $\mathcal{B}_2$ die Schar der Hyperbelbahnen der oberen Halbachse sein, die als eine "Grenzbahn" die Asymptoten der Hyperbel=Bahnschar hat und mit Γ_2 (das ebenfalls die JACOBI'sche Konstante c_0 besitzt) abschließt. Es läßt sich nun ein gewisser Parameter $\tau : 0 \leq \tau \leq 1$ im Hinblick auf die zu betrachtenden Superpositionen unter der Berücksichtigung der Forderung 1 so

einführen, daß für $\tau = 0$ nur die elliptische Bewegung Γ_1 als Bahn vor-
 liegt (der hyperbolische Anteil also nicht berücksichtigt werden muß, da er
 sich auf die asymptotische Lösung reduziert, die in endlichen Zeiten das
 Librationszentrum weder erreichen noch verlassen kann und wir hierfür dar-
 um dieses Zentrum selbst nehmen können), für $\tau = 1$ dagegen nur die hy-
 perbolische Bewegung Γ_2 vorliegt (der Anteil der elliptischen Bewegungen
 für diesen Grenzfall also auf das Librationszentrum zusammenschrumpft),
 Lassen wir τ nun von 0 bis 1 streng monoton wachsen, so nehmen in
 unserer Superposition beim elliptischen Anteil die Halbachsen von der Grö-
 ße der Halbachsen der Bahn Γ_1 streng monoton gegen 0 ab, beim hyper-
 bolischen Anteil dagegen wächst dabei gleichzeitig die reelle Achse streng
 monoton von 0 bis $y_2(0)$, der reellen Achse von Γ_2 . Da aber für die
 Superposition, wie in Paragraph 10 bzw. in (III;82) gezeigt wurde und im
 übrigen aus Abb. 14 zu ersehen ist, für $\tau = 0$ nun $\dot{x}(0) > 0$, für $\tau = 1$
 dagegen $\dot{x}(0) < 0$ gilt und diese Superposition bezüglich τ zumindest stetig
 ist, existiert wenigstens ein τ^* , ($0 < \tau^* < 1$), für das $x(0; \tau) = 0$
 ist. Auch die Eindeutigkeit dieses τ^* läßt sich leicht nachweisen. Da bei
 der zu τ^* gehörigen Superposition μ^* , die Lösung des linearisierten
 Differentialgleichungssystems ist, die Geschwindigkeit für $t = 0$ ver-
 schwindet, muß der Probekörper für $t = 0$ auf der zugehörigen HILLschen
 Grenzkurve $H_0^{(1)}$ sein; und zwar nach den obigen Vereinbarungen (Forde-
 rung 2) im Scheitel P der HILLschen Grenzhypel. Nach den Ergebnis-
 sen des Paragraphen 6, i. b. (II, 47), hat diese zu τ^* gehörende Super-
 positionsbahn μ^* für $t = 0$ eine Spitze im Ortsraum. Für alle
 $\tau : \tau \in [0, 1] \setminus \tau^*$ dagegen schneidet natürlich gemäß Forderung 2
 die entsprechende Bahn zum Zeitpunkt $t = 0$ die y-Achse senkrecht,
 und zwar für $0 \leq \tau < \tau^*$ von links nach rechts und für $\tau^* < \tau \leq 1$
 von rechts nach links.

Doch wie steht es nun um das Bahnverhalten in einer bezüglich τ^*
 punktierten τ -Umgebung? Für alle $\tau : 0 < \tau < 1$ ist bei einer Super-
 position μ^τ einmal ein echter Anteil der hyperbolischen Bahnschar vor-

handen, zum andern ein echter Anteil der elliptischen Bahnschar. Jede dieser hyperbolischen Bewegungen verläuft im wesentlichen von rechts nach links, wobei für $|t| \rightarrow \infty$ Abszissen und Ordinaten dem Betrage nach gegen $+\infty$ gehen. Außerdem läßt sich leicht einsehen, daß $\dot{x}(t)$ für $t = 0$ ein lokales Maximum besitzt (Abb. 14).

a.) Für $\tau : 0 < \tau < \tau^*$ ist bei der Superposition $\mathcal{H}_1^\tau$ der elliptische Anteil gemäß der obigen Betrachtungen so stark, daß für $t = 0$ die Bewegung von links nach rechts verläuft. Daraus und aus dem Verlaufsverhalten des hyperbolischen Anteils läßt sich ohne weiteres erkennen, daß sich in einer gewissen Umgebung um $t = 0$ eine Schleife ausbildet (Abb. 14). Da weiter für $\tau \nearrow \tau^*$ in der Superposition der elliptische Anteil ab-, der hyperbolische Anteil zunimmt, also für $\tau \nearrow \tau^*$ nun $\dot{x}(0, \tau) \searrow 0$ und somit und mit Hilfe des JACOBI'schen Integrals $y(0, \tau)$ auf der reellen Achse der HILL'schen Grenzhyperbel

$H_0^{(1)}$ gegen den Scheitel P von $H_0^{(1)}$ wächst, müssen diese

Schleifen mit wachsendem $\tau : \tau \nearrow \tau^*$ immer kleiner und enger werden, bis sie schließlich für $\tau = \tau^*$ in die oben erwähnte Spitze ausarten.

b.) Für $\tau : \tau^* < \tau < 1$ ist bei der Superposition $\mathcal{H}_2^\tau$ selbst zu dem

Zeitpunkt $t = 0$, in dem die Geschwindigkeit des elliptischen Anteils am größten wird und natürlich positiv ist, der Betrag dieser Geschwindigkeit kleiner als der Betrag der (negativen) Geschwindigkeit des hyperbolischen Anteils. Es bleibt demnach für diese Superposition stets $\dot{x}(t) < 0$, ($-\infty < t < +\infty$), und es können sich somit im Gegensatz zum Fall a) keine Schleifen ausbilden. Zumindest für wenig von τ^* abweichende $\tau > \tau^*$ ergibt eine genauere Analyse dafür folgende charakteristische Eigenschaft: Der elliptische Anteil ist immerhin noch so stark, daß sich im Bahnverlauf zwei Wendepunkte herausbilden (Abb. 14), die im übrigen für $\tau \searrow \tau^*$ in den Scheitel P der HILL'schen Grenzhyperbel $H_0^{(1)}$ hineintrücken.

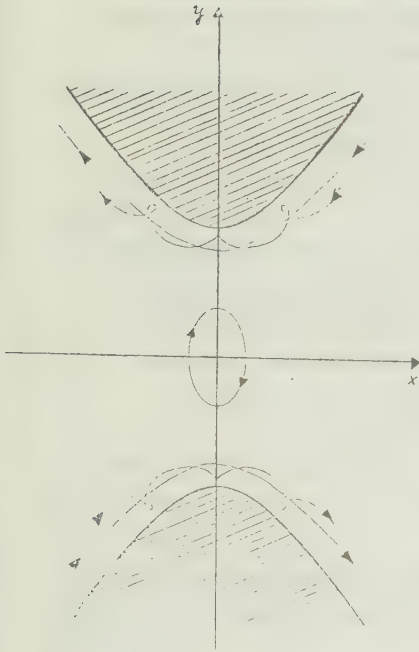


Abb. 14

y -Achse liegen müssen. Für wachsendes τ , ($0 < \tau < \tau^*$) werden diese Schleifen immer kleiner und enger und ziehen sich schließlich auf P zusammen. Die Vertreter von $\{\vartheta\}$ stellen dagegen mehr oder weniger Verformungen der Bahn $\sqrt{2}$ dar, wobei für wenig von τ^* abweichende τ , ($\tau > \tau^*$) bezüglich der y -Achse symmetrische Wendepunkte auftreten, die (wie bereits erwähnt) für gegen τ^* fallende τ in P hineintrücken.

Zur Superposition hatten wir diejenigen Librationsellipsen und Hyperbel verwendet, deren Koordinaten zum Zeitpunkt $t = 0$ auf der positiven Ordinate lagen. Genau so hätten wir verfahren können, wenn beide Koordinaten auf der negativen Ordinate gelegen hätten. Wegen der hier globalen Antisymmetrie zur Abszisse erübrigt sich dieser Fall automatisch. Wir

Aus ersichtlichen Gründen sind für $0 \leq \tau \leq 1$ alle Bahnen antisymmetrisch bezüglich der y -Achse.

Wir können obige Ergebnisse folgendermaßen zusammenfassen:

Die Bahn $y^* = y\tau^*$ läßt sich als Grenzbahn zweier Bahnscharen $\{\tau\}$ und $\{\vartheta\}$ auffassen, deren Vertreter alle ein und dieselbe HILL'sche Grenzkurve $H_0^{(\nu)}$ besitzen und für $t = 0$ die y -Achse senkrecht schneiden. Alle Vertreter der Schar $\{\tau\}$ haben im Ortsraum stets Schleifen und somit auch Doppelpunkte, die wegen der Antisymmetrie natürlich auf der

können aber auch von der Forderung 2 absehen; die Betrachtung läßt sich ähnlich gestalten, nur wird die Spitze jetzt im allgemeinen nicht im Scheitel P einer der oberhalb bzw. unterhalb der Abszisse liegenden infinitesimalen HILLschen Grenzhypelbeläste liegen,

Fall 3: Statt Forderung 1 gelte nun: Die Scheitel der HILLschen Grenzhypelbeln liegen auf der Abszisse: es gilt also

$c_0 > 2 \Omega(x_{L_\nu}, 0) \quad (\nu = 1, 2, 3).$ Man überzeuge sich, daß die Be-

trachtungen genau so verlaufen wie im Fall 2, nur daß wir jetzt Hyperbelbahnen benötigen, deren Scheitel für $t = 0$ nun auf der Abszisse liegen, etwa auf der positiven, während zum gleichen Zeitpunkt bei den Ellipsenbahnen die Bahnkoordinaten auf der anderen, hier also auf der negativen Abszisse liegen müssen.

§ 19. Die beiden Scharen der Nullkrümmungskurven des vollständigen Differentialgleichungssystems.

Als Zähler der Bahnkrümmung für Lösungsbahnen des Eingeschränkten Dreikörperproblems hatten wir im Paragraph

$$(V.1) \quad \dot{y}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{y} = 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \dot{y} \Omega_x - \dot{x} \Omega_y$$

gefunden. Ist nun

$$\dot{x} = v \cos \varphi = v (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dot{y} = v \sin \varphi = v \operatorname{tg} \varphi (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{mit } v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2(\Omega - \dot{\Omega}), \quad \dot{\Omega} = \dot{\Omega}_0 = \Omega(x_0, y_0)$$

(JACOBI'sches Integral)

wobei φ der Winkel sein soll, unter dessen Tangentenrichtung eine Bahnkurve die Krümmung Null hat, so erhalten wir aus (V.1) offenbar die Beziehung

$$(V.2) \quad 4(\Omega - \dot{\Omega}) + \sqrt{2(\Omega - \dot{\Omega})} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \Omega_x - \\ - \sqrt{2(\Omega - \dot{\Omega})} \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} \Omega_y = 0$$

oder nach Wegschaffen der Nenner und Division durch $\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}_0} \neq 0$

$$2\sqrt{2} \sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \cdot \sqrt{1 + y'^2} = \Omega_y - y' \Omega_x$$

oder wenn wir diese Gleichung ins Quadrat erheben und ordnen

$$(V.3) \quad (\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))y'^2 - 2\Omega_x \Omega_y y' + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}) = 0$$

Diese Differentialgleichung nach y' partiell abgeleitet ergibt

$$(V.4) \quad (\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))y' - \Omega_x \Omega_y$$

Für die Punkte des Diskriminantenortes muß neben (V.3) außerdem für (VI.4)

$$(VI.4') \quad (\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))y' - \Omega_x \Omega_y = 0$$

gelten unter der Voraussetzung, daß (V.4) ein weiteres Mal partiell nach y' abgeleitet, dort nicht verschwindet. Es muß also gelten

$$(V.4'') \quad (\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})) \neq 0.$$

Damit können wir (V.4') nach y' auflösen und (V.3) auf Normalform bringen. Für den Diskriminantenort erhalten wir also die beiden Gleichungen

$$(V.5) \quad y'^2 - 2 \frac{\Omega_x \Omega_y}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))} y' + \frac{(\Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))} = 0$$

$$y' = \frac{\Omega_x \Omega_y}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))}$$

Eliminieren wir hieraus y' , so haben wir mit

$$(V.6) \quad \Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}) = 0$$

die Gleichung des Diskriminantenortes. Mit der zweiten Gleichung aus (V.5) erhalten wir daraus für deren Steigung

$$(V.7) \quad y' = - \frac{\Omega_x}{\Omega_y}$$

d.h. ihre Tangente liegt dort normal zum Gradienten der Potentialfunktion. Für die Differentialgleichungen der Schar der beiden Nullkrümmungskurven erhalten wir aus der ersten Gleichung (V.5) sofort

$$(V.8) \quad y' = \frac{\Omega_x \Omega_y}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))} + \frac{\sqrt{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))(\Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))}}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))}$$

$$= \frac{1}{(\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega}))} \left\{ \Omega_x \Omega_y \pm \sqrt{8} \sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})} \right\}$$

Der Diskriminantenort ist bekanntlich der geometrische Ort der Punkte, an dem für eine Kurvenschar die Eindeutigkeit nicht mehr gewährt ist. Dieser Ort ist offenbar nun aus (V.8) direkt zu ersehen: er liegt dort, wo

$$(V.9) \quad \sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \cdot \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})} = 0$$

ist, also zum einen dort, wo (V.6) gilt, zum andern wo $\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} = 0$ ist. Diesen zweiten Fall hatten wir aber nach (V.2) ausgeschlossen. Daß diese Punkte dennoch mit zum Diskriminantenort gehören, hätten wir aber auch direkt aus (V.2) erhalten können, wenn wir dort zunächst durch

$\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \neq 0$ dividiert hätten und anschließend zum Grenzübergang $\Omega \rightarrow \dot{\Omega}$ übergegangen wären. In diesem wie in jenem Fall wären wir hierfür zu dem Tangentenanstieg

$$(V.10) \quad y' = \frac{\Omega_y}{\Omega_x} \quad \text{für} \quad \Omega - \Omega_0 = 0$$

gekommen; d. h. die beiden Scharen von Nullkrümmungskurven münden auf jeden Fall senkrecht in die HILLschen Grenzkurven ein.

Nun wollen wir noch die Krümmung bestimmen, mit der die Nullgeschwindigkeitskurven die ihnen zugehörigen HILLschen Grenzkurven treffen. Hierzu benötigen wir aber die zweiten Ableitungen der Nullgeschwindigkeitskurven, die wir sofort aus (V.8) zu

$$\begin{aligned}
 (V.11) \quad y'' = & \frac{1}{[\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})]} \left\{ \Omega_y \Omega_{xx} + \Omega_x \Omega_{xy} + y'(\Omega_y \Omega_{xy} + \Omega_x \Omega_{yy}) \right. \\
 & \pm \sqrt{2} \frac{\Omega_x + y' \Omega_y}{\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}}} \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})} \pm \\
 & \pm \sqrt{8} \sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \frac{\Omega_x \Omega_{xx} + \Omega_y \Omega_{xy} - 4\Omega_x + y'(\Omega_x \Omega_{xy} + \Omega_y \Omega_{yy} - 4\Omega_y)}{\sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})}} \\
 & - \frac{2}{[\Omega_x^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})]^2} [\Omega_x(\Omega_{xx} - 4) + y'(\Omega_x \Omega_{xy} - 4\Omega_y)] [\Omega_x \Omega_y \pm \\
 & \left. \pm \sqrt{8} \sqrt{\Omega - \dot{\Omega}} \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 - 8(\Omega - \dot{\Omega})}] \right\}
 \end{aligned}$$

erhalten.

Da in der Nähe der HILLschen Grenzkurven $\Omega - \dot{\Omega} \approx 0$ ist, ist in (V.11) nur der mit dem Faktor $\sqrt{2}$ versehene Ausdruck der zweiten der fünf Zeilen dieser Formel kritisch, gegen den die übrigen Terme vernachlässigt werden können. Es gilt also für $\Omega - \dot{\Omega} \approx 0$ asymptotisch

$$(V.11') \quad y'' \approx \pm \frac{\sqrt{2}}{\Omega_x^2} \frac{\Omega_x + y' \Omega_y}{\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}}} \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2}$$

wobei y' durch (VI.10) gegeben ist. Damit gilt asymptotisch für die zweite Ableitung

$$(V.11'') \quad y'' \approx \pm \frac{\sqrt{2}}{\Omega_x^3} \frac{(\Omega_x^2 + \Omega_y^2)^{3/2}}{\sqrt{\Omega - \dot{\Omega}}} \quad \text{mit} \quad \Omega \approx \dot{\Omega} .$$

Hiermit und (VI.10) ergibt sich also für die Krümmung der senkrecht

auf ihre HILLsche Grenzkurve treffende Nullkrümmungskurven

$$(V.12) \quad \kappa = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} \approx \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\Omega - \tilde{\Omega}}}.$$

Nun ist nach dem Mittelwertsatz

$$(V.13) \quad \Omega - \tilde{\Omega} = \Omega(x, y) - \Omega(x_0, y_0) = (x - x_0) \tilde{\Omega}_x + (y - y_0) \tilde{\Omega}_y,$$

wobei durch " $\sim$ " wieder angedeutet werden soll, daß die Werte der partiellen Ableitungen zu nehmen sind an einem Zwischenpunkt der Verbindungsgeraden von (x_0, y_0) und (x, y) . Weil die Nullkrümmungskurven senkrecht auf ihre HILLsche Grenzkurven treffen, gilt asymptotisch

$$(V.14) \quad x - x_0 \approx \frac{\tilde{\Omega}_x}{\sqrt{\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2}} \Delta \ell, \quad y - y_0 \approx \frac{\tilde{\Omega}_y}{\sqrt{\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2}} \Delta \ell,$$

$$\Delta \ell = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Aus (V.12), (V.13) und (V.14) ergibt sich die gesuchte Krümmung zu

$$(V.15) \quad \kappa \approx \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\tilde{\Omega}_x \tilde{\Omega}_x + \tilde{\Omega}_y \tilde{\Omega}_y}{\sqrt{\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2}}}} \approx \pm \sqrt{\frac{2}{\tilde{A}}} \frac{1}{\sqrt{\Delta \ell}} \quad \text{mit } \tilde{A} = \sqrt{\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2}.$$

Damit gelangen wir zu der

Zusammenfassung: Die Nullkrümmungskurven treffen die ihr zugehörige HILLsche Grenzkurve senkrecht mit unendlicher Krümmung von der Ordnung $\sqrt{\Delta \ell}$ und dem Faktor $\sqrt{\frac{2}{\tilde{A}}}$, wobei $\tilde{A} = \sqrt{\tilde{\Omega}_x^2 + \tilde{\Omega}_y^2}$ ist.

Es handelt sich um zwei Scharen. Zum gleichen Ergebnis waren wir auch in Kapitel IV, Paragraph 16 gekommen, wie unmittelbar aus (IV.24) zu ersehen ist.

Aus dieser Zusammenfassung folgt unmittelbar, daß zu jeder HILLschen Grenzkurve H_0 ein HILLsches Gebiet G_0 existiert (das ist bekanntlich ein Gebiet, für das in jedem seiner Punkte Nullkrümmung für Bahnen des Differentialgleichungssystems (IV;1) mit zugehöriger HILLschen Grenze H_0 infrage kommen können), in dem noch zu H_0 benachbarte, im bezüglich H_0 erlaubten Gebiet liegende Niveaukurven $\{R\}$ der Potentialfunktion Ω liegen. War nun P_0 ein Punkt von H_0 , so trafen diesen zwei Nullkrümmungskurven senkrecht und diese unterschieden sich dort durch den Krümmungssinn (also das Vorzeichen der Krümmung).

Sei nun $\mathcal{L}$ die Schar aller Nullkrümmungskurven, die auf H_0 die Krümmung $-\infty$, $\mathcal{A}$ die Schar derer, die dort die Krümmung $+\infty$ haben. Ist P_1 ein Punkt der Niveaukurve R von Ω . Wir nennen P_1 "geeignet", wenn die von $\mathcal{L}$ durch P_1 gehende Nullkrümmungskurve dort noch negative, die von $\mathcal{A}$ durch P_1 verlaufende Nullkrümmungskurve noch positive Krümmung hat. Besteht die Niveaukurve R nur aus geeigneten Punkten, so soll R selbst geeignet heißen. Wir halten fest als

Definition: Das größte Teilgebiet von G_0 , das nur aus "geeigneten" Niveaulinien der Potentialfunktion $\Omega(x, y)$ besteht, heiße HILLscher Streifen $\hat{G}_0$.

Dieser HILLsche Streifen $\hat{G}_0$ wird sich noch von einigem Nutzen erweisen.

Wie wir in dem nächsten Paragraphen sehen, lassen sich in ihm eine ganze Reihe von Eigenschaften von Lösungen des Eingeschränkten Dreikörperproblems in der Nähe der ihr zugehörigen HILLschen Grenzkurve finden. Das Wesentliche an $\hat{G}_0$ ist, daß der Abstand der Berandungen voneinander stets positiv ausfällt.

§ 20. Qualitative Untersuchungen der Lösungsbahnen im
HILL'schen Streifen $\hat{G}_0$.

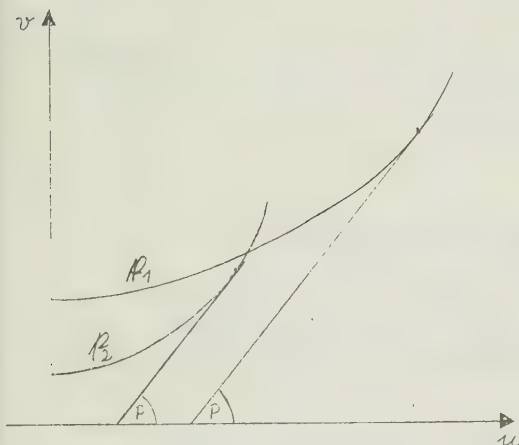


Abb. 15

Wir bringen einen gemäß Abb. 15 sehr naheliegenden Satz 1: Es sollen zwei Kurven R_1 und R_2 vorgegeben sein, die beide auf der Ordinate mit dem Tangentenanstieg Null beginnen, wobei dort der Ordinatenwert von R_2 höchstens so groß ist wie der von R_1 . Weiter soll in den Kurvenpunkten gleicher Steigung p die Krümmung von R_2

stets größer sein als die (positive) Krümmung von R_1 , also

$$(V;16) \quad \tilde{\kappa}(R_2, p) > \tilde{\kappa}(R_1, p) > 0$$

$$\text{für } 0 \leq v' = p \leq p_0 \leq \infty$$

Dann lautet die Behauptung

$$(V;17) \text{ Ist } v_2(0) \leq v_1(0) \text{ dann gilt } v_2(p_0) < v_1(p_0)$$

$$(V;18) \text{ Ist } u_2(0) = u_1(0) = 0 \text{ dann gilt } u_2(p_0) < u_1(p_0).$$

Beweis: Für die Krümmung $\tilde{\kappa}$ gilt bekanntlich die Beziehung

$$(V;19) \quad \tilde{\kappa} = \frac{v''(u)}{[1 + (v'(u))^2]^{3/2}}$$

Parametrisieren wir nun nach der Steigung p um, so haben wir zu-

nächst

$$(V;20) \quad v'(u) = p = \frac{\dot{v}}{\dot{u}} \quad \text{mit} \quad \dot{v} = \frac{dv}{dp} \quad \text{und} \quad \dot{u} = \frac{du}{dp}$$

Damit gilt aber

$$(V;21) \quad v''(u) = \frac{d}{du} \left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}} \right) = \frac{d}{dp} \left(\frac{\dot{v}}{\dot{u}} \right) \frac{dp}{du} = \frac{\dot{u}\ddot{v} - \ddot{u}\dot{v}}{\dot{u}^2} \cdot \frac{1}{\frac{du}{dp}} = -\frac{\ddot{v} - p\ddot{u}}{\dot{u}^2}$$

Nun läßt sich (V;20) auch

$$(V;22) \quad \dot{v} = p\dot{u}$$

schreiben, woraus, nach p abgeleitet

$$(V;23) \quad \ddot{v} = \dot{u} + p\ddot{u}$$

folgt. Damit erhalten wir dann aus (V;21)

$$(V;24) \quad v'' = -\frac{1}{\dot{u}}$$

und hiermit für die nach p parametrisierte Krümmung gemäß (V;19) und (V;20)

$$(V;25) \quad \kappa(\mathcal{R}, p) = \frac{1}{\dot{u}} \cdot \frac{1}{[1 + p^2]^{3/2}}.$$

Hieraus und aus der Voraussetzung (V;16) ergibt sich die Doppelungleichung

$$(V;26) \quad \frac{1}{\dot{u}_2} \cdot \frac{1}{[1 + p^2]^{3/2}} > \frac{1}{\dot{u}_1} \cdot \frac{1}{[1 + p^2]^{3/2}} > 0$$

Multiplizieren wir diese Doppelungleichung mit dem stets positiven Ausdruck $(1 + p^2)^{3/2}$, so folgt sofort

$$\frac{1}{\dot{u}_2} > \frac{1}{\dot{u}_1} > 0 \quad \text{oder aber} \quad \dot{u}_1 > \dot{u}_2 \quad \text{und daraus nach Integration}$$

$$u_1(p_0) - u_1(0) > u_2(p_0) - u_2(0) \quad \text{d.h. die Behauptung (V;18).}$$

Substituieren wir nun in der Doppelungleichung (V;26) $\dot{u}$ durch (V;22) so erhalten wir

$$(V;27) \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{p}{[1+p^2]^{3/2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \frac{p}{[1+p^2]^{3/2}} > 0$$

und nach Multiplikation mit dem wegen $p > 0$ positiven Ausdruck

$$\frac{[1+p^2]^{3/2}}{p}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{1}} > 0 \quad \text{oder also} \quad \sqrt[3]{1} > \sqrt[3]{2}. \quad \text{Die Integration nach}$$

p liefert schließlich die behauptete Ungleichung (V;17).

Nun wollen wir uns noch fragen, was aus den Koordinatenabschnitten wird, wenn die Krümmung immer mehr zunimmt. Ist K eine große positive Zahl, so soll für die Krümmung einer Kurve gemäß (V;27) gelten

$$\tilde{K}(\rho, p) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{p}{[1+p^2]^{3/2}} > K > 0$$

oder also, da mit $p > 0$ auch $\sqrt[3]{2} > 0$ sein muß,

$$0 < \sqrt[3]{2} < \frac{1}{K} \frac{p}{[1+p^2]^{3/2}} = \frac{1}{K} \left[-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \right]'$$

oder aber

$$0 < v(p_0) - v(0) < \frac{1}{K} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+p_0^2}} \right].$$

Läßt man nun für festes p_0 : $0 < p_0 \leq \infty$ K beliebig groß werden,

so zeigt sich, daß die Ordinatenabschnittsdifferenz $v(p_0) - v(0) > 0$

beliebig klein wird. Zum gleichen Ergebnis gelangen wir für den Abszissenabschnitt. Um dies zu zeigen, gehen wir von (V;26) aus. Ist wieder

$K > 0$ eine große Zahl und gelte

$$\tilde{K}(\rho, p) = \frac{1}{u} \frac{1}{[1+p^2]^{3/2}} > K > 0,$$

so erhalten wir hieraus

$$0 < \dot{u} < \frac{1}{K} \frac{1}{\left[1 + p^2\right]^{3/2}}.$$

Auf der rechten Seite dieser Doppelungleichung steht aber, abgesehen von dem

Faktor $\frac{1}{K}$, die Ableitung von $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}}$, weshalb sofort nach Inte-

gration

$$0 < u(p_0) - u(0) = u(p_0) < \frac{1}{K} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{p_0^2}}}$$

folgt und sich die Behauptung wieder nach erfolgtem Grenzübergang ergibt: Es gilt also

$$u(p_0) \searrow 0 \quad \text{für} \quad K \rightarrow \infty.$$

Bemerkung: Fassen wir nun u als Funktion von v auf und setzen wir noch der Deutlichkeit halber $u = y$ und $v = x$, dann wird aus den Behauptungen (V;17) und (V;18) bei entsprechender Motivikation der in ihnen auftretenden geometrischen Größen die Behauptung

(V;17') Ist $x_2(\infty) \leq x_1(\infty)$ dann gilt $x_2(p_0) < x_1(p_0)$

(V;18') Ist $y_2(\infty) = y_1(\infty)$ dann gilt $y_2(p_0) < y_1(p_0)$

unter der Voraussetzung

(V;16') $\tilde{K}(R_{2,p}) < \tilde{K}(R_{1,0}) < 0$ für $\infty \geq y' = p > p_0 \geq 0$.

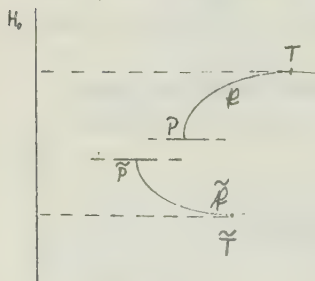


Abb. 16

1. Wir betrachten nun eine Bahn, auf der für einen Zeitpunkt $t = t_0$ ein Probekörper im Punkt T ist, in dem die Bahntangente gerade in Richtung des positiven Gradienten der Potentialfunktion Ω verläuft. Die Bahnkrümmung ist in diesem Punkt T nach Paragraph 13 noch positiv, die Bahn weist

dort also noch eine Rechtskrümmung auf. Verfolgen wir die Bahn (für $t < t_0$) zurück, so wächst die Krümmung noch; die Bahn kann ihre HILLsche Grenzkurve nicht erreichen, sondern trifft in P eine Gradientenkurve von Ω senkrecht. In P hat die Bahnkrümmung ein lokales Maximum. Nach Paragraph 13 erreicht nämlich zum einen bei festgehaltenem Punkt die Bahnkrümmung ein Maximum, falls die Tangentenrichtung der Bahn mit dem Gradienten von Ω einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$ bildet,

ein Minimum, wenn dieser Winkel $\frac{3}{2}\pi$ ist und für die Krümmung der

Zwischenwerte gilt $\mathcal{K}(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \mathcal{K}(\frac{\pi}{2} + \varphi)$; zum andern be-

stehen die Nenner der Krümmungsformel (III;84) aus der Differenz des Wertes der Potentialfunktion Ω in diesem Punkt und dem Wert des

Potentials der HILLschen Grenzkurve. Betrachtet man nun den Bahnver-

lauf eines Probekörpers, der sich auf die HILLsche Grenzkurve zu be-

wegt, dessen Bahntangente in $\tilde{T}$ in Richtung des negativen Gradienten fällt (Abb. 16), so erhalten wir einen entsprechenden Bahnbogen, bei

dem die Bahnkrümmung von $\tilde{T}$ bis $\tilde{P}$ wächst, wobei die Bahn in $\tilde{P}$

wieder eine Gradientenkurve von Ω senkrecht trifft, die im allgemei-

nen verschieden ist von der Gradientenkurve, die $\mathcal{R}$ in P trifft.

Variieren wir aber $\tilde{T}$, so läßt sich erreichen, daß P mit $\tilde{P}$ überein-

stimmt und der aus $\mathcal{R}$ und $\tilde{\mathcal{R}}$ zusammengesetzte Bogen Teil einer

einzigen Bahn wird. Betrachten wir nun eine weitere Bahnkurve, die in

einem Punkt P^1 zwischen P^0 und der

HILLschen Grenzkurve die Gradientenkur-

ve g von Ω , die auch durch P^0 geht,

trifft, so sind offenbar die Voraussetzun-

gen des obigen Satzes erfüllt und diese

neue Bahn ist schmäler als das durch P^0

verlaufende Bahnstück. Geben wir auf g

eine Punktfolge P^v vor, die streng mono-

ton gegen 0 abnimmt und verfolgen wir

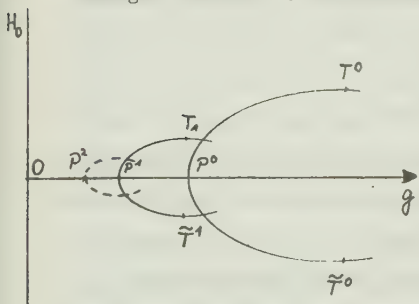


Abb. 17

(gleicher JACOBI'schen Konstante) bis zu den einander entsprechenden T^ν und $\tilde{T}^\nu$, so sehen wir, daß diese Bahnkurvenbögen gemäß der Bemerkung 1 nach dem Satz 1 immer schmaler werden und ihre Breite für $\nu \rightarrow \infty$ gegen Null gehen muß. Für den rechts von T^ν liegenden Teil der Bahn gilt (und entsprechend Ähnliches gilt auch für das rechts von $\tilde{T}^\nu$ liegende Bahnstück), solange die Bahn ununterbrochen im HILL'schen Streifen $\hat{\mathcal{L}}_0$ verbleibt, folgender

Satz 2: Zu einem Zeitpunkt t_0 berührt die Bahnkurve eines Probekörpers des Eingeschränkten Dreikörperproblems, der sich von der zur Bahnkurve gehörenden HILL'schen Grenzkurve H_0 entfernt, den Gradienten der Potentialfunktion Ω in einem Punkt T des HILL'schen Streifens $\hat{\mathcal{L}}_0$.

Behauptung: Solange die Bahnkurve mit zunehmendem $t > t_0$ in $\hat{\mathcal{L}}_0$ verbleibt, hat sie keinen Wendepunkt.

Beweis: Die Nullkrümmungskurven für Bahnen, auf denen sich ein Probekörper von H_0 entfernt, verlaufen nach Paragraph 16 Schar $\mathcal{B}$, von H_0 fallend und nach unten gekrümmt. Tangiert eine Bahn den Gradienten der Potentialfunktion in T , so ist seine Bahn nach Paragraph 13 dort rechtsgekrümmt und seine Bahntangente bildet in T einen positiven Winkel mit der Tangente der durch T hindurchgehenden Nullkrümmungskurve. Angenommen die Bahn hätte in $\hat{\mathcal{L}}_0$ einen Wendepunkt, etwa in T' . Dann müßte aber die Bahnkrümmung in T' Null sein, die Bahnkurve die durch T' gehende Nullkrümmungskurve berühren. Diese Berührung muß von der konkaven Seite der Nullkrümmungskurve erfolgen; denn andernfalls gäbe es, da der Winkel zwischen Bahntangente und der Tangente der Nullkrümmungskurve in T positiv ist, einen weiteren, zwischen T und T' gelegenen Berührungspunkt T'' der Bahnkurve und einer Nullkrümmungskurve, in dem die Bahn diese Nullkrümmungskurve von der konkaven Seite her berührt und wir dehnten unsere Betrachtung auf T'' aus. Da also die Berührung der Bahn mit der Nullkrümmungskurve von der konkaven Seite her erfolgt, muß

die Krümmung der Bahn größer sein als der Betrag der Krümmung der Nullkrümmungskurve, was zum Widerspruch dazu führt, daß die Bahn in T' einen Wendepunkt hat. Gezeigt ist demnach auch, daß in jedem Punkt der Bahnkurve, solange die Bahn in $\hat{\mathcal{L}}_0$ bleibt, der Schnittwinkel der Bahntangente mit der Tangente der durch diesen Punkt hindurchgehenden Nullkrümmungskurve (der Schar der Nullkrümmungskurven, die tangierend die Krümmung von Bahnen, auf denen der Probekörper sich von der HILLschen Grenzkurve H_0 entfernt, Null wird; also nach Paragraph 16 Abb. 13 Schar $\mathcal{L}$) einen positiven Winkel bildet.

Ein entsprechendes Ergebnis erhalten wir für Bahnen, auf denen der Probekörper sich auf H_0 hin bewegt: diese Bahnen können in $\hat{\mathcal{L}}_0$ ebenfalls keinen Wendepunkt aufweisen und der Winkel zwischen Bahntangente und der Tangente der Nullkrümmungskurve (nach Paragraph 16 Abb. 13 der Schar $\mathcal{L}$) im Schnittpunkt von Bahn und Nullkrümmungskurve bleibt negativ.

Wir haben also eine ganze Bahnschar $\mathcal{L}$ gleicher JACOBI'scher Konstante, die ein und dieselbe Gradientenkurve der Potentialfunktion Ω sämtlich senkrecht mit positiver Ordinatengeschwindigkeit in Punkten P dieser Gradientenkurve treffen und dort Schleifen bilden, die um so enger werden, je näher P an die HILLsche Grenzkurve H_0 heranrückt. Gezeigt wurde ferner von den Bahnen dieser Schar $\mathcal{L}$, daß sie, so lange sie in

$\hat{\mathcal{L}}_0$ liegen, keine Wendepunkte aufweisen, nicht jedoch, daß sie von einem gewissen P an geschlossene Schleifen in $\hat{\mathcal{L}}_0$ bilden, die sich für $P \rightarrow 0$ auf 0 zusammenziehen. Daß dem aber so sein muß, läßt

sich folgendermaßen einsehen: Die Bahntangenten in T^0 und $\tilde{T}^0$ sind in erster Näherung parallel. In beiden Punkten ist die Bahn noch nach rechts gekrümmt. Es gibt also rechts von T^0 und $\tilde{T}^0$ noch Punkte R^0 und $\tilde{R}^0$ der Bahn, in denen die Bahntangenten genommen, unter der eventuellen Voraussetzung, daß P bereits hinreichend nahe bei Q liegt, einander in einem Punkt S^0 des HILLschen Streifens $\hat{\mathcal{L}}_0$ treffen. Da aber die Bahn, solange sie in einem Stück in $\hat{\mathcal{L}}_0$ verbleibt, also auch noch

rechts von R^0 und $\tilde{R}^0$ rechtsgekrümmt ist, müssen sich die beiden von P^0 ausgehenden Bahnäste in $\tilde{S}^0$ innerhalb des ganz im HILLschen Streifen $\hat{\mathcal{G}}_0$ liegenden Dreiecks mit den Eckpunkten R^0 , $\tilde{R}^0$ S^0 schneiden.

H_0

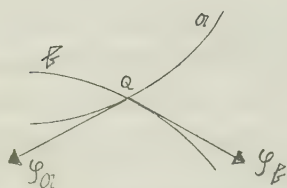


Abb. 18

2. Sei Q ein Punkt des HILLschen Streifens $\hat{\mathcal{G}}_0$, α die durch ihn hindurchgehende Nullkrümmungskurve der Schar α (das war noch einmal die Schar der Nullkrümmungskurven für Bahnen eines Probekörpers auf H_0 zu) und B eine Kurve der Schar B (das war noch einmal die Schar der

Nullkrümmungskurven für Bahnen, auf denen sich ein Probekörper von H_0 entfernt). Wie aus Paragraph 13 (III;84) leicht zu ersehen ist, kann dann eine Bahn in Q nur linksgekrümmt sein, wenn in Q die Bewegungsrichtung des Probekörpers in den von $\mathcal{G}_\alpha$ und $\mathcal{G}_B$ in Q aufgespannten Winkelraum weist. Dies läßt sich auch anders ausdrücken:

Nähert sich der Probekörper in Q der HILLschen Grenzkurve, so gilt von Q aus gesehen für den Richtungswinkel der $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3}{2}\pi$,
entfernt er sich dagegen, so ist $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$.

Für einen sich H_0 nähernden Probekörper hat seine Bahn

Rechtskrümmung, wenn die dem Betrage nach nicht zu große Winkeldifferenz $\varphi - \varphi_\alpha$ negativ,

(V;28)

Linkskrümmung dagegen, wenn die dem Betrage nach nicht zu große Winkeldifferenz $\varphi - \varphi_\alpha$ positiv ist,

Entsprechend hat eine Bahn eines sich von H_0 entfernenden Probekörpers

Linkskrümmung, wenn die dem Betrage nach nicht zu große Winkeldifferenz $\mathcal{P} - \mathcal{P}_\#$ negativ,

(V;29)

Rechtskrümmung dagegen, wenn die dem Betrage nach nicht zu große Winkeldifferenz $\mathcal{P} - \mathcal{P}_\#$ positiv ist.

Aus diesem Grunde gilt folgender

Satz 3: Q sei ein Punkt des HILLschen Streifens $\hat{\mathcal{H}}_0$. Nähert sich der Probekörper der HILLschen Grenzkurve H_0 und berührt in Q die durch Q hindurchgehende Nullkrümmungskurve $\alpha \in \mathcal{A}$ oder entfernt sich der Probekörper von H_0 und berührt in Q die durch Q hindurchgehende Nullkrümmungskurve $\beta \in \mathcal{B}$, so liegen in beiden Fällen nicht nur Nullkrümmung sondern auch Wendepunkt vor.

Der Beweis ist sehr einfach. Es nähere sich der Probekörper H_0 und berühre in $Q \in \hat{\mathcal{H}}_0$ die Nullkrümmungskurve $\alpha \in \mathcal{A}$. Weil nun $Q \in \hat{\mathcal{H}}_0$, ist α im Punkt Q konvex. Dort berührt die Bahn α für $t = t_0$, hat also die Krümmung Null. Benachbarte Nullkrümmungskurven von α schneidet sie demnach für $t < t_0$ unter negativer Winkeldifferenz und für $t > t_0$ unter positiver Winkeldifferenz. Nach (V;28) liegt im ersten Fall für die Bahn Rechtskrümmung, im zweiten dagegen Linkskrümmung vor; die Bahn hat in Q tatsächlich einen Wendepunkt. In entsprechender Weise zeigt man, daß für die Berührung einer Bahn, auf der sich ein Probekörper von H_0 entfernt, mit einem $\beta \in \mathcal{B}$ im Punkt Q ebenfalls ein Wendepunkt vorliegen muß. Hieraus folgt übrigens sofort der

Satz 4: Bei Annäherung eines Probekörpers an die HILLsche Grenzkurve H_0 kann die Bahnkurve, so lange ein Bahnstück von ihr ganz im HILLschen Streifen $\hat{\mathcal{H}}_0$ liegt, dort höchstens einen Wendepunkt haben. Die gleiche Aussage gilt auch für ein ganz in $\hat{\mathcal{H}}_0$ liegendes Bahnstück, auf dem sich ein Probekörper von H_0 entfernt.

Beweis: Ein Probekörper nähere sich im HILLSchen Streifen $\hat{\mathcal{L}}_0$ der HILLSchen Grenzkurve und seine Bahn habe dort für t_1 in Q_1 und t_2 in Q_2 , $t_1 < t_2$, zwei Wendepunkte. Im Beweis des vorigen Satzes hatten wir gesehen, daß für wenig von t_1 abweichende $t < t_1$ die Bahn eine Rechtskrümmung hat, für wenig von t_1 abweichende $t > t_1$ die Bahn linksgekrümmt sein muß. Die gleiche Aussage gälte für Q_2 . Damit müßten aber wegen der stetigen Differenzierbarkeit von Lösungen des Differentialgleichungssystems (I.20) zwischen Q_1 und Q_2 wenigstens zwei weitere Wendepunkte Q_3, Q_4 liegen, die miteinander zusammenfallen können und die der Probekörper für t_3, t_4 , $t_1 < t_3 \leq t_4 < t_2$ erreicht. Für wenig von t_3 abweichende Zeiten $t < t_3$ müßte nun die Bahn linksgekrümmt, für $t > t_4$ dagegen rechtsgekrümmt sein. Nach dem Beweis des vorigen Satzes sind solche Wendepunkte aber wegen der Konvexität der Nullkrümmungskurven der Schar $\mathcal{A}$ für die Bahnen, auf denen sich der Probekörper der HILLSchen Grenzkurve H_0 nähert, nicht möglich. Damit kann die Bahn eines Probekörpers, der sich H_0 nähert, solange sie ganz in $\hat{\mathcal{L}}_0$ verbleibt, höchstens einen Wendepunkt haben. Die gleiche Aussage gilt entsprechend auch für Bahnen, auf denen sich der Probekörper von H_0 entfernt. Statt, wie oben, Nullkrümmungskurven der Schar $\mathcal{A}$, werden hier jedoch Kurven der Schar $\mathcal{B}$ zum Beweis hinzugezogen.

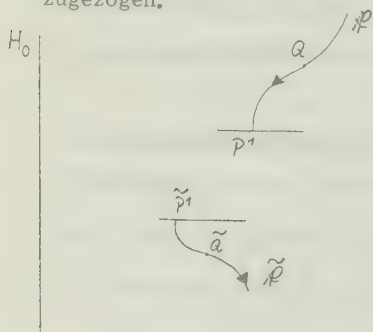


Abb. 19

Die Nullkrümmungskurven der Schar $\mathcal{A}$ waren (Abb.19) nach links hin fallend, konvex und trafen H_0 senkrecht. Geben wir in Q die Bahn $\mathcal{B}$ eines auf H_0 sich hinbewegenden Probekörpers für den Zeitpunkt t_0 so vor, daß sie dort in Q die durch Q hindurchführende Nullkrümmungskurve a der Schar $\mathcal{A}$ berührt, so liegt nach

Satz 3 für die Bahn ein Wendepunkt vor; und zwar geht sie nach (V;28) im Bewegungsverlauf von einer rechtsgekrümmten in eine linksgekrümmte über. Hierbei wird der Winkel zwischen Bahntangente und dem Gradienten der Potentialfunktion Ω für wachsendes t immer größer, so daß die Bahn die HILLsche Grenzkurve H_0 nicht erreichen kann. Vielmehr wächst (nach III;84) die Linkskrümmung einmal mit zunehmender Winkeldifferenz, zum anderen mit abnehmendem Abstand zwischen Probekörper und H_0 , bis die (negative) Linkskrümmung ein lokales Minimum erreicht, wenn die Bahn in einem Punkt P einen Gradienten von Ω senkrecht schneidet.

Da die Nullkrümmungskurven der Schar $\mathcal{L}$ von der HILLschen Grenzkurve H_0 aus, die sie sämtlich senkrecht treffen, nach rechts hin fallend und konkav sind, läßt sich, wie in Abb. 19 angedeutet, in $\tilde{Q}$ eine Bahn $\tilde{P}$ mit dort fallender Tangente so vorgeben, daß sie in $\tilde{Q}$ die durch $\tilde{Q}$ hindurchgehende Nullkrümmungskurve $\mathcal{F}$ der Schar $\mathcal{L}$ tangiert. Nach Satz 3 und (V;29) geht mit wachsendem t die Bahn von einer Linkskrümmung in eine Rechtskrümmung über, wobei mit fallendem t nach (III;84) die Linkskrümmung immer stärker wird, bis sie bei senkrechtem Schneiden der Bahntangente mit dem Gradienten der Potentialfunktion Ω in $\tilde{P}$ extremal wird. Im allgemeinen werden $\tilde{P}$ und P nicht übereinstimmen. Es lassen sich aber die Anfangswerte Q und $\tilde{Q}$ so variieren, daß P und $\tilde{P}$ zusammenfallen, aus den beiden Bahnstücken $\mathcal{P}$ und $\tilde{\mathcal{P}}$ eines wird. Dieses gehört offenbar der Bahnklasse $\mathcal{V}$ an.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

- [1] ARNOLD, V.I.: On the stability of positions of equilibrium of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case. Dokl. Akad. Nauk USSR 137, 255 (1961)
- [2] BURRAU, C.: Recherches numériques concernant des solutions periodique d'un cas spécial du problème des trois corps. Astronomische Nachrichten (Berlin) 136, 161 (1894)
- [3] CHARLIER, C.L.: Die Mechanik des Himmels. Band I (1902), Band II (1907) von Veit, Leipzig
- [4] HORN, J.: Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung, Leipzig (1905)
- [5] LAGRANGE, J.: Œuvres Vol. IX Panekoucke, Paris (1772)
- [6] LEONTOVIC, A.M.: On the stability of the Lagrange periodic solutions for the reduced problem of three bodies. Dokl. Akad. Nauk USSR 143, 525 (1962)
- [7] LJAPUNOV, A.A.: The general problem of the stability of motion. Commun. Math. Soc. Krakow 2, 1 (1882)
- [8] MAC MILLAN, W.D.: An integrable case in the restricted problem of three bodies. Astronomical Journal (New York) 27, 11 (1913)
- [9] MALKIN, J.G.: Theorie der Stabilität einer Bewegung. R. Oldenburg, München (1959)
- [10] PERRON, O.: Neuer Existenzbeweis für periodische Bahnen im eingeschränkten Dreikörperproblem. Monatshefte Math. Phys. 43, 81 (1936)
- [11] PLUMMER, H.C.: On periodic orbits in the neighbourhood of centres of libration. Monthly notices of the Royal Astronomical Society (London) 62, 6 (1901)

- | | | |
|------|-----------------|---|
| [12] | RABE, E.: | Determination and survey of periodic Trojan orbits in the restricted problem of three bodies.
Astronomical Journal (New York)
66,500 (1961) |
| [13] | ROUTH, E. J.: | On Laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion.
Proc. London Math. Soc. 6, 86 (1875) |
| [14] | SIEGEL, C. L.: | Vorlesungen über Himmelsmechanik.
Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1956) |
| [15] | STUMPFF, K.: | Himmelsmechanik.
Band II: Das Dreikörperproblem (1965) |
| [16] | SUNDMAN, K. F.: | Mémoire sur le problème des trois corps.
Acta Math. 36, 105 (1912) |
| [17] | SZEBEHELY, V.: | Stability of the points of equilibrium in the restricted problem.
Astronomical Journal 72, 7 (1967) |
| [18] | SZEBEHELY, V.: | Theory of Orbits.
Academic Press New York and London (1967) |
| [19] | THIELE, T. N.: | Recherches numériques concernant des solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps.
Astronomische Nachrichten (Berlin)
138, 1 (1895) |
| [20] | WILLARD, H. R.: | On a family of oscillating orbits of short period.
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society (London) 73, 471 (1913) |
| [21] | WINTNER, A.: | Librationstheorie des restringierten Dreikörperproblems.
Math. Zeitschrift 32, H. 5 (1930) |

Lebenslauf

Am 17. November 1939 wurde ich als Sohn des Arztes Dr. Karl Schmid und seiner Ehefrau Erna geb. Görcke in Dietersweiler, Kreis Freudenstadt, geboren.

Vom Herbst 1946 bis zum Sommer 1950 besuchte ich die Volksschule in Zell im Wiesental, vom Herbst 1950 an das Hebelgymnasium in Lörrach und vom Herbst 1951 bis zum Sommer 1953 das Internat Schule Schloß Salem. Im Herbst 1953 kam ich wieder an das altsprachliche Gymnasium in Lörrach, von dem ich Frühling 1959 nach dem Abitur abging.

SS 1959 begann ich mein Studium mit Mathematik, Astronomie und Physik an der Universität Basel und studierte dort bis zum SS 1960. Anschließend leistete ich meinen Wehrdienst ab und setzte das Studium SS 1962 und WS 1962/63 an der Universität Tübingen und SS 1963 an der Freien Universität Berlin fort, das ich Sommersemester 1970 mit dem Diplom in Mathematik abschloß.

Vom Juli 1970 bis zum April 1971 war ich Teilzeitassistent für Astronomie bei Prof. Dr. F. Hinderer am I. Mathematischen Institut der Freien Universität Berlin und ab April 1971 bis Juni 1975 Assistent für Mathematik bei Prof. Dr. E. Mohr an der Technischen Universität Berlin.

